This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 8508.45.5

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Chemical Laboratory

THÉORIE

DES COURBES ET DES SURFACES

DU SECOND ORDRE.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI :

A ANGOULÊME. . . .	chez PEREZ-LÉCLER.
	— CHABOT et Cie.
BORDEAUX.	— CHAUMAS.
BOURGES.	— VERMEIL.
LILLE.	— VANACKÈRE.
LYON.	— PERISSE frères.
MARSEILLE.	— CAMOIN.
METZ.	— WARION.
MONTPELLIER. . .	— SÉWALLE.
NANCY.	— G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES.	— FOREST.
ORLÉANS.	— GATINEAU.
RENNES.	— VERDIER.
ROUEN.	— LEBRUMENT.
STRASBOURG. . . .	— TREUTTEL et WURTZ.
	— LEVRAULT (Mme).
	— DERIVAUX.
	— DRACH.
TOULOUSE.	— H. LEBON.
	— GALLON.

A LONDRES.	chez DULAU et Cie, Soho-Square.
LEIPZIG.	— MICHELSEN.
TURIN.	— BOCCA.
VIENNE.	— ROHRMAN.
MADRID.	— A. POUPART et frère.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

1314
43-101
20

THÉORIE
DES COURBES ET DES SURFAC
DU SECOND ORDRE,

OU

TRAITÉ COMPLET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE;

PAR J.-L. BOUCHARLAT,

Chevalier de la Légion d'honneur, Docteur ès-Sciences et ancien Professeur de Mathér *transcendantes aux* Écoles militaires; Membre des Académies royales de Bordeaux *Marseille*, *Rouen*, *Toulouse*, Caen, Orléans, Dijon et Nancy; de celles du Gard, de la Sor *Vaucluse*; *de la Société* Philotechnique, de l'Athénée des Arts, de la Société académiq *Loire-Inférieure*, *et des* Sociétés des Belles-Lettres et Arts de Tours, de Mâcon, de Caml *Strasbourg*, *etc.*

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE, *CORRIGÉE* ET AUGMENTÉE DE NOTES ET DES PRINCIPES DE L TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1845.

Math 8508.45.5

HARVARD COLLEGE
July 9, 1932
LIBRARY

Transferred from
Chemistry Laboratory

Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas comme ci-dessous, la signature du Libraire, seru contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.

Bachelier

A MONSIEUR

LE SÉNATEUR LAGRANGE (*).

MONSIEUR LE COMTE,

En m'accordant la faveur de placer votre nom illustre à la tête de cet Ouvrage, vous renouvelez en moi cette vive reconnaissance dont vos bontés m'ont toujours pénétré, et les regrets de ne pouvoir vous présenter un hommage digne de vous. Mais qui pourrait s'en flatter? Est-il des idées en mathématiques dont la force de votre génie ne vous ait fait sonder la profondeur? Non, Monsieur, rien ne peut vous être offert que ce tribut d'admiration que les hommes

(*) Quoique le titre de Sénateur n'existe plus en France, j'ai cru devoir reproduire cette dédicace telle qu'elle a été acceptée par Lagrange dans les deux premières éditions de cet Ouvrage.

supérieurs commandent toujours aux siècles dont ils sont la gloire.

En agréant mes faibles essais, c'est un encouragement que vous voulez donner à tous ceux qui, comme moi, s'occupent des moyens de faciliter l'accès de la plus belle des sciences.

Heureux celui qui, parcourant ensuite une brillante carrière, éprouvera les charmes que vos sublimes conceptions répandent sur toutes les parties des mathématiques!

Mais ce qui ne peut être ressenti que des témoins de vos vertus privées, ce sont ces sentiments avec lesquels j'ai l'honneur d'être,

Monsieur le Comte,

Votre très-humble et très-respectueux
serviteur,

BOUCHARLAT.

PRÉFACE.

Cet ouvrage, qui sert d'introduction à mes *Éléments de Calcul différentiel, de Calcul intégral* et *de Mécanique*, nécessitait dans cette nouvelle édition, de grandes améliorations réclamées par les progrès de la science. J'ai donc eu beaucoup de lacunes à remplir, de points capitaux à éclaircir, et de méthodes à perfectionner. Voilà ce qui m'a conduit à refondre entièrement mon plan, en établissant une liaison intime non-seulement d'une proposition à la subséquente, mais encore entre les grandes divisions de cet ouvrage.

Cette liaison des idées, si essentielle dans toutes les productions de l'esprit, coûte moins à former en littérature qu'en mathématiques : en effet, la plus grande difficulté que présente la composition d'un ouvrage historique ou dramatique, d'un poëme ou même d'un roman, est de savoir tracer un plan qui jette un grand intérêt sur le sujet; mais, en mathématiques, le meilleur plan devient quelquefois impraticable, lorsque l'auteur, arrêté dans les transitions, ne peut inventer des démonstrations nécessitées par la disposition des parties de l'ouvrage et la nouveauté de son cadre.

C'est dans la recherche de ces démonstrations que tous les ressorts de l'imagination sont en jeu, et que si, avec l'esprit le plus méthodique, le jugement le plus sain et

le plan le plus sagement conçu, on manque d'invention, il sera impossible d'éviter les endroits obscurs qu'occasionne l'absence des démonstrations intermédiaires.

Ces passages inintelligibles proviennent aussi de ce qu'on n'a point su se départir de certaines idées encore ignorées du lecteur; et, ce qui est à remarquer, c'est qu'en s'exprimant dans un langage énigmatique, comme l'auteur n'entrevoit rien qu'il ne conçoive parfaitement, il est loin de se croire manquer de clarté.

Il est cependant un genre d'ouvrages scientifiques où l'on est moins dans l'obligation de se mettre à la portée du lecteur; je veux parler des Mémoires. C'est là que, n'écrivant que pour des savants, on doit épargner leur temps, en supprimant les détails inutiles de choses qu'ils sont censés connaître; mais il faut convenir qu'en s'affranchissant ainsi de toutes les entraves, on s'exerce bien peu dans l'art de transmettre ses pensées. On dira peut-être, qu'en compensation, l'auteur a la possibilité d'enrichir la science d'aperçus nouveaux; c'est ce qui existe, en effet, dans les ouvrages de quelques hommes de génie, et le but que devraient toujours se proposer ceux qui composent des Mémoires; mais l'originalité n'est pas le partage de la multitude. Au reste, ce qu'il y a de certain, c'est que le choix de la question étant à la volonté de l'auteur, il a bien moins d'obstacles à surmonter que celui qui, traitant un sujet complexe, développe forcément les théories qui s'y rattachent, et n'est pas même exempt de faire preuve d'invention et d'étendue de vues.

L'abus dont on vient de parler, de fonder ses raisonnements sur des notions étrangères au lecteur, a son analogie en littérature lorsque, dans un dialogue, l'au-

teur, au lieu de s'identifier avec le personnage qu'il fait parler, se met à sa place, et lui prête des sentiments qui sont hors de la vérité. Par une semblable cause, le mathématicien, s'il m'est permis d'emprunter son langage, ne devient souvent inintelligible que parce qu'il s'exprime *en fonction* des connaissances étrangères au lecteur, et ne se départit point de certaines idées, pour ne voir que par les yeux d'un lecteur peu versé dans la science.

Enfin, pour achever ces rapprochements, je puis ajouter que le choix des méthodes correspond à ce qu'on appelle le *goût* en littérature, tact délicat des convenances, qui consiste à rejeter du beau langage une foule d'expressions qui le dépareraient. De même, en mathématiques, ce n'est qu'avec un discernement exquis qu'on évite d'employer des méthodes qui peuvent nous conduire dans des embarras scientifiques, et dont la plupart du temps les longueurs ne sont pas le moindre inconvénient.

La vérité étant le but que le mathématicien se propose d'atteindre, il semble qu'en la recherchant on ne puisse errer comme dans une question littéraire : c'est une opinion accréditée, et qui est démentie par l'expérience, comme l'atteste la méprise de Newton sur les forces centrales, dans la première édition de ses *Principes de la Philosophie naturelle*. D'Alembert s'en était déjà aperçu; mais il appartenait à Lagrange de nous apprendre en quel point le géomètre anglais avait erré.

Lagrange ne montra pas moins de sagacité en fondant la théorie des solutions particulières des équations différentielles; ce qui détruisit l'espèce de paradoxe qui embarrassait Clairaut.

La controverse sur les forces vives, à une époque bien antérieure, avait aussi occasionné de grands démêlés entre les adeptes de Descartes et Leibnitz.

Le débat qui eut lieu entre Jacques et Jean Bernoulli n'eut pas moins de célébrité. Ce dernier eut une altercation encore plus vive avec Leibnitz, sur les logarithmes négatifs et sur les imaginaires; cette question était si ardue, que chacun des deux adversaires appuyait ses assertions sur des raisons qui semblaient irrécusables : difficulté immense, qu'Euler seul sut aplanir. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1749.)

Ce grand géomètre mit encore plus de résistance dans la lutte qu'il soutint contre Daniel Bernoulli et d'Alembert, sur les cordes vibrantes; c'est au sujet de ce fameux problème qu'Euler produisit son idée hardie et originale des fonctions irrégulières et discontinues. En vain d'Alembert s'obstina-t-il à regarder ces sortes de fonctions comme inadmissibles dans l'analyse; Euler, défendu par Lagrange, vit adopter son opinion par tous les savants. (*Mémoires de l'Académ. de Turin*, années 1770-1773.)

Ces contradictions qui se manifestent dans les mathématiques dérivent, comme le fait remarquer Euler, d'une idée peu exacte qui, sans qu'on s'en aperçoive, s'introduit dans une doctrine; d'où il tire la conséquence qu'il est extrêmement dangereux de juger des choses dont on ne peut avoir que des idées imparfaites. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1749.)

Concluons qu'en mathématiques, comme dans tout ce qui appartient au raisonnement, il suffit qu'on se trompe sur un point, pour que l'erreur se reflète sur toutes les parties d'une théorie.

Il ne faut donc pas s'étonner si les caprices de la mode exercent même leur empire jusque sur les mathématiques.

C'est ainsi qu'un auteur classique crut dégager la science de beaucoup d'entraves, en regardant comme des axiomes plusieurs propositions dont la preuve lui paraissait trop longue à établir. On se jeta ensuite dans une extrémité opposée, en renonçant à toute démonstration fondée sur la considération des infiniment petits, et l'on ne fit pas attention que ces sortes d'abréviations deviennent d'une grande utilité pour mettre en équations les problèmes de la haute analyse, et ont l'avantage de peindre en quelque sorte à nos yeux les formules différentielles.

Il n'a rien moins fallu que cette direction donnée aux esprits, pour mettre en vogue les démonstrations par l'absurde, si longues, si uniformes, et qui naguère encore usurpaient tout le champ de la géométrie, nous montrant la vérité comme tombée des nues, et n'expulsant qu'en apparence l'infiniment petit, qu'on ne fait que circonscrire en évitant d'en prononcer le nom.

C'est ici que nous distinguerons deux marches à suivre dans l'étude des mathématiques : l'une consiste à prouver qu'une vérité a lieu, sans s'inquiéter pourquoi elle existe; l'autre ne se borne pas à parvenir à la connaissance de cette vérité, mais exige encore que l'on apprenne comment elle se rattache aux connaissances acquises. Le premier de ces procédés satisfait peu l'esprit, mais est favorable à l'inventeur égoïste, qui, content de jouir du fruit de son travail, cache la route qui a dirigé ses pas, et par là ajoute une sorte de prestige à sa démonstration.

Le second procédé, plus digne d'un esprit philosophique, répand un charme indicible sur nos travaux mathématiques, élève la pensée, fortifie l'esprit et exerce continuellement l'imagination.

C'est la conclusion que l'on peut tirer des préceptes que nous prescrivent les hommes les plus versés dans la métaphysique des sciences.

Descartes (*Traité de la Méthode*) nous dit expressément, « que la marche la plus naturelle de l'esprit hu-
» main, est de conduire par ordre nos pensées, en
» commençant par les objets les plus simples et les plus
» faciles à connaître, pour monter peu à peu, comme
» par degrés, à la connaissance des plus composés »; et il ajoute : « qu'il n'est pas de choses cachées qu'on ne
» découvre. »

Locke, dans son *Essai sur l'Entendement humain* (livre IV), adoptant la même opinion, affirme que les idées les plus générales et les plus abstraites ne sont pas celles que l'esprit reçoit les premières et avec le plus de facilité, et reconnaît que ce n'est point en recourant à des généralités que Newton est parvenu à démontrer tant de propositions qu'on ne saurait assez admirer, et qui toutes étaient des vérités inconnues avant lui.

Wolf, qui fut en Allemagne le disciple de Descartes et de Leibnitz, ne s'y acquit une si grande réputation sous le rapport de la clarté de ses écrits, qu'en procédant de conséquences en conséquences, comme le veulent ces illustres géomètres, et en n'avançant un principe que bien affermi sur un autre.

Enfin Euler (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1749) nous fait sentir que l'examen des cas par-

ticuliers nous ouvre l'intelligence des objets les plus compliqués.

Cette idée se rapproche beaucoup de celle que Condillac développe dans sa *Logique*, lorsqu'il nous dit que si nous jetons les yeux sur une vaste campagne, rien ne nous frappe d'abord, et que ce n'est qu'après avoir examiné chaque objet en particulier, que leur ensemble fera impression sur nous.

Il résulte de l'opinion de ces grands maîtres, que la marche la plus philosophique, celle qui satisfait le plus l'esprit dans l'étude des mathématiques, est de s'élever progressivement aux formules générales, en procédant comme si l'on inventait soi-même toute la science. L'étude stimulée par la curiosité devient alors une source de jouissances.

Ce n'est pas que je méconnaisse les avantages de ces formules générales qui, consultées comme des oracles, répondent à toutes les questions, éclaircissent une théorie, y montrent même des choses que nous ne soupçonnions pas; rien n'agrandit plus l'esprit que de le diriger vers ce noble but; mais je ne voudrais pas qu'on prît pour point de départ ce qui doit être le prix de nos efforts. Accoutumons-nous donc à généraliser nos idées, mais non à les recevoir élaborées primitivement par des devanciers; autrement on pourrait dire qu'ils généralisaient aussi, ces anciens professeurs qui, dans leur routine, calquant l'algèbre sur l'arithmétique, avaient autrefois donné lieu à ce proverbe : *Cela est difficile comme de l'algèbre.*

Dans cette nouvelle édition, je me suis donc attaché à suivre l'ordre immédiat des idées, en commençant par les plus simples; c'est la raison qui m'a porté à

faire précéder la discussion générale des courbes du second ordre par la démonstration de leurs équations dans le cas où leurs axes sont dans la position la plus symétrique à l'égard de la courbe. C'est ainsi que je parviens, par des moyens très-simples, aux équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Je n'ai pas moins simplifié la théorie des tangentes; quant à celle des diamètres conjugués, que jusqu'à présent les auteurs modernes n'ont traitée que par les formules de la transformation des coordonnées, j'ai senti que, pour la transition, il fallait trouver un cas où il y eût nécessité de passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques; c'est à quoi je suis parvenu sans faire usage de la transformation des coordonnées, encore ignorée du lecteur. J'ai démontré à priori que les diamètres sont partagés en deux parties égales; ayant ensuite déterminé directement leurs valeurs analytiques, j'établis la relation qui les lie entre eux, et de laquelle dérive le nom de *diamètres conjugués*, et j'arrive progressivement aux formules de la transformation, qui, dans leur application, nous montrent toute la fécondité de l'analyse.

J'ai remplacé, par des démonstrations plus simples et non moins symétriques, celles qui sont relatives aux rectangles et aux carrés des axes comparés à ceux des diamètres.

Enfin, la théorie des cordes supplémentaires, que j'ai considérée dans leur plus grand état de généralité, complète celle des diamètres conjugués.

Dans un système de coordonnées rectangulaires, comme dans un système de coordonnées obliques, les ordonnées sont parallèles : je donne maintenant une

autre disposition à ces coordonnées, en supposant qu'elles partent toutes d'un même point, ce qui nous conduit aux courbes polaires, qui ne sont qu'un cas particulier des courbes semblables, dont j'ai rectifié et éclairci la théorie.

Les trois courbes du second ordre étaient connues des anciens sous le nom de *sections coniques;* je les rattache, comme eux, à un même système, en traitant des sections du cône et du cylindre; mais j'ai remplacé par des démonstrations plus simples, celles que je donnais par la considération du plan, et qui sont rejetées dans les notes, pour ne pas intervertir l'ordre des matières.

Depuis l'invention de l'algèbre, ces courbes sont mieux classées en les rattachant à l'équation complète du second ordre à deux inconnues; ce qui donne lieu à la discussion où, pour la première fois, dans les précédentes éditions, j'examinais l'influence de chaque coefficient sur la nature et la position de la courbe. Je l'ai abrégée de moitié, en rejetant dans les notes des remarques particulières qui, bien qu'intéressantes, compliquaient trop la marche. Cette discussion est ici mieux placée; elle complète la théorie des trois courbes, puisqu'au lieu de placer l'origine au centre, au sommet ou au foyer, comme nous l'avons fait, lorsque nous sommes parvenus directement à leurs équations, nous nous élevons à un plus haut degré de généralité, en nous laissant la faculté de placer cette origine aussi bien hors de la courbe qu'intérieurement.

Les différentes opérations que nous avons employées pour reconnaître la nature de la courbe laissent à désirer un procédé qui, à la seule inspection de l'équation, nous permette d'assigner immédiatement à

quelle courbe elle appartient : c'est de quoi nous nous occupons dans le chapitre où la division en genres s'effectue.

Après avoir traité de tout ce qui concerne les courbes du second ordre, j'examine dans quels cas leur équation ne se rapporte qu'à des lignes droites, qu'à des points, ou n'a aucune signification.

Je montre comment, par leurs intersections, on obtient les racines des équations du 3e et du 4e degré, et on résout quelques problèmes fameux de l'antiquité.

Enfin, je résous complétement celui qui a pour objet de déterminer la courbe du second ordre qui peut passer par cinq points donnés sur un plan, ou par un moindre nombre, lorsque quelques-uns de ces points sont remplacés par certaines conditions.

Tout ce qui précède nous conduit naturellement à la discussion des équations dont je donne des exemples; je passe ensuite à des formules générales que j'ai trouvées pour éviter cette discussion, déterminant les longueurs des axes de l'ellipse et de l'hyperbole, et celle du paramètre de la parabole, en fonction des coefficients de l'équation générale, et fixant la position de ces lignes à l'aide d'une formule qui donne leurs inclinaisons.

Enfin, pour compléter la théorie des courbes du second ordre, je m'occupe de leur quadrature, mais en avertissant le lecteur que je ne le fais que pour me conformer à l'usage, attendu que c'est un objet qui, étant du ressort du calcul différentiel, peut y être traité par des moyens plus expéditifs.

Qu'il me soit permis de m'élever ici contre cette habitude où l'on est de surcharger les ouvrages élémentaires d'une multitude de questions oiseuses et isolées,

qui ne tendent qu'à dérober un temps précieux aux étudiants, à une époque où les progrès de la science ouvrent un vaste champ à leurs travaux. Combien en est-il qui, par cette raison, ne sortent pas des éléments? tandis que les hautes mathématiques nous offrent le plus beau spectacle dont l'intelligence humaine puisse jouir!

Est-il rien, en effet, qui atteste plus la force de nos facultés intellectuelles, que les ingénieuses méthodes du calcul différentiel et du calcul intégral, instruments admirables sans lesquels nous ignorerions encore les sublimes découvertes de la mécanique rationnelle, de cette mécanique qui nous dévoile tous les ressorts de l'univers, nous transmet toutes les lois qui le régissent, tous les mystères de son organisation?

A cette hauteur prodigieuse, que devons-nous penser de celui qui, méprisant ce qu'il ne connaît pas, ne voit dans les signes algébriques que des chiffres insignifiants? Ne ressemble-t-il pas au sauvage qui, regardant un Européen courbé sur un livre, demanderait à quoi lui sert de contempler, durant des journées entières, ces bizarres caractères?

Pour répondre aux détracteurs de la science, il suffit de leur mettre sous les yeux les progrès de la civilisation. S'ils surpassent tout ce que pouvaient imaginer nos aïeux, on le doit principalement à l'étude des mathématiques, qui depuis un demi-siècle répand la vie dans tous les services publics, et réalise en partie les prévisions de Condorcet, qui presque sur sa tombe rédigeait son *Tableau historique des Progrès de l'esprit humain*.

La troisième partie de cet ouvrage est consacrée aux surfaces courbes. Comme dans ce qui précède, j'y entre

en matière par les choses les plus simples, et je parviens directement aux équations de ces surfaces, d'après des conditions données.

Quant à la discussion de leur équation générale, j'y ai apporté de grands changements dus aux progrès de la science : cependant je dois reconnaître que la nouvelle méthode que j'emploie n'est qu'une extension de celle que j'avais trouvée pour les courbes dans la première édition de cet ouvrage. Néanmoins, je rends justice à tout ce qu'il y a d'ingénieux dans la manière dont on simplifie l'équation générale, en disposant convenablement du plan des x, y. Le bel usage que l'on fait des coordonnées obliques prouverait leur utilité dans l'analyse, si de plus hautes considérations de mécanique rationnelle et d'astronomie n'en réclamaient l'emploi.

Parmi les objets les plus intéressants rejetés dans les notes, je citerai la solution que j'ai donnée de ce problème : *Connaissant le rayon d'un cercle, trouver les équations qui déterminent les côtés de l'heptagone et de l'ennéagone en fonction de ce rayon ;* méthode qui est applicable à un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Un problème qui n'est pas d'une moindre importance donne lieu à la démonstration d'une construction graphique fort simple pour trouver, à moins d'un dix-millième près, le rapport du diamètre à la circonférence.

Ces notes comprennent aussi des développements qui complètent quelques théories, et plusieurs secondes démonstrations, parmi lesquelles je dois ranger celle que j'avais trouvée dans les précédentes éditions pour éva-

luer l'aire de la parabole, et celle que je donnais des sections du cône par la géométrie de l'espace. Je dois citer encore des procédés fort simples pour trouver les sinus et cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs.

Cet ouvrage est précédé d'un Traité de trigonométrie, dans lequel, reprenant les choses de plus haut qu'on ne le fait ordinairement, je démontre, avec le dernier degré de rigueur, les propositions les plus élémentaires, sans toutefois laisser rien à désirer dans ce qui concerne les autres.

TABLE DES MATIÈRES.

EXPOSITION DES PRINCIPES
DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — De la mesure des angles..... 1

CHAPITRE II. — Des lignes trigonométriques et de leurs rapports entre elles..... 4

CHAPITRE III. — De la correspondance des lignes trigonométriques avec les différents arcs de cercle..... 10

CHAPITRE IV. — Détermination des principales formules trigonométriques..... 14

CHAPITRE V. — De la construction des tables des sinus..... 27

CHAPITRE VI. — Des logarithmes..... 32

CHAPITRE VII. — De la résolution des triangles rectangles.... 50

CHAPITRE VIII. — De la résolution des triangles obliquangles. 59

CHAPITRE IX. — Application des règles prescrites dans la résolution des triangles obliquangles à des exemples..... 71

THÉORIE DES COURBES DU SECOND ORDRE.
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. — De l'application de l'analyse déterminée à la solution des problèmes de Géométrie..... 79

CHAPITRE II. — De la construction des quantités rationnelles. 103

Pages

CHAPITRE III. — De la construction des quantités radicales du second degré. 107

CHAPITRE IV. — De la construction des équations complètes du second degré à une inconnue. 110

CHAPITRE V. — De l'équation à deux indéterminées, en général, et de quelle manière elle donne naissance à une ligne, droite ou courbe, qu'on nomme *le lieu de l'équation*..... 113

CHAPITRE VI. — De l'équation de la ligne droite..... 117

CHAPITRE VII. — De l'équation de la ligne droite assujettie à passer par des points donnés..... 123

CHAPITRE VIII. — De l'équation de la perpendiculaire et de celle de la parallèle à une droite dont l'équation est donnée. 130

CHAPITRE IX. — De l'expression de la distance de deux points. 132

CHAPITRE X. — De l'équation du cercle..... *Ib.*

CHAPITRE XI. — Des coordonnées des points d'intersection des lignes..... 134

CHAPITRE XII. — Problèmes de géométrie résolus par l'analyse indéterminée, au moyen de l'équation de la ligne droite.... 136

CHAPITRE XIII. — Des branches des courbes..... 148

CHAPITRE XIV. — De l'ellipse..... 154

CHAPITRE XV. — De l'hyperbole..... 175

CHAPITRE XVI. — De la parabole..... 191

CHAPITRE XVII. — De l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. 199

CHAPITRE XVIII. — Des diamètres en général..... 209

CHAPITRE XIX. — Des diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole. 212

CHAPITRE XX. — Des diamètres de la parabole..... 229

CHAPITRE XXI. — Des cordes supplémentaires..... 233

CHAPITRE XXII. — De la transformation des coordonnées en général..... 236

CHAPITRE XXIII. — De la transformation des coordonnées des courbes du second ordre..... 242

CHAPITRE XXIV. — Des équations polaires..... 252

CHAPITRE XXV. — Des courbes semblables..... 258

CHAPITRE XXVI. — Des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, etc., et de la détermination des racines des équations par l'intersection des courbes..... 271

CHAPITRE XXVII. — Des sections coniques et cylindriques.... 279

Pages.

CHAPITRE XXVIII. — De l'influence des constantes, de l'équation générale des courbes du second ordre sur la nature et la position de la courbe. 287

CHAPITRE XXIX. — De la division des courbes du second ordre en genres. 305

CHAPITRE XXX. — Des cas particuliers où l'équation générale des courbes du second ordre ne peut construire l'une des trois courbes. 312

CHAPITRE XXXI. — Des points donnés sur un plan par lesquels on peut faire passer une courbe du second ordre. 318

CHAPITRE XXXII. — Discussion des équations du second degré, appliquée à des exemples. 322

CHAPITRE XXXIII. — Formules générales pour construire l'ellipse ou l'hyperbole, au moyen de leurs équations. 326

CHAPITRE XXXIV. — Formules pour construire la parabole au moyen de son équation. 335

CHAPITRE XXXV. — De la quadrature des courbes du second ordre. 340

THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. — De la manière dont on peut déterminer la position d'une droite dans l'espace. 355

CHAPITRE II. — Des plans coordonnés. 356

CHAPITRE III. — Des projections d'une droite située dans l'espace, et de ses plans projetants. 357

CHAPITRE IV. — Des équations d'une droite située dans l'espace. 358

CHAPITRE V. — Solution de divers problèmes relatifs à la ligne droite dans l'espace. 361

CHAPITRE VI. — De l'équation du plan. — Divers problèmes sur le plan. 372

CHAPITRE VII. — De la sphère. 387

Pages.

CHAPITRE VIII. — De l'ellipsoïde..... 390

CHAPITRE IX. — De l'hyperboloïde à une nappe..... 400

CHAPITRE X. — De l'hyperboloïde à deux nappes..... 408

CHAPITRE XI. — Des paraboloïdes..... 413

CHAPITRE XII. — De la transformation des coordonnées dans l'espace..... 424

CHAPITRE XIII.—Discussion de l'équation générale des surfaces du second ordre..... 431

CHAPITRE XIV. — Des cas particuliers de l'équation générale des surfaces du second ordre, où l'on ne peut construire une des cinq surfaces dont il est question dans le chapitre précédent..... 442

CHAPITRE XV. — Des plans tangents aux surfaces courbes du second ordre..... 449

NOTES.

NOTE 1re (page 13). — Des arcs plus grands que la circonférence, et des arcs négatifs..... 453

NOTE 2 (page 14). — Des tangentes d'arcs plus grands que la demi-circonférence..... 455

NOTE 3 (page 17). — Seconde solution du problème de trouver le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs..... 456

NOTE 4 (page 20). — Le rayon d'un cercle étant donné, trouver le côté d'un polygone régulier inscrit à ce cercle d'un nombre quelconque de côtés..... 460

NOTE 5 (page 22). — Déterminer le sinus et l'arc de 3 degrés.... 472

NOTE 6 (page 31). — Démontrer que la différence du sinus à l'arc est moindre que le cube de cet arc..... 474

NOTE 7 (page 37). — Moyen d'exprimer en petits nombres une fraction comprise entre deux autres..... 476

Pages.

NOTE 8 (page 38). — Parvenir à la série convergente qui donne le logarithme de $x+1$, et procédé pour rendre logarithmique une formule qui se présente sous la forme d'une somme ou d'une différence. 477

NOTE 9 (page 96). — Trouver, par une construction graphique, le rapport approché du diamètre à la circonférence..... 488

NOTE 10 (page 103). — Démontrer, par la seule considération de la propriété du carré de l'hypoténuse, qu'un triangle est toujours coupé proportionnellement par une parallèle menée à sa base. 493

NOTE 11 (page 131). — Démonstration directe de l'équation de la perpendiculaire. 495

NOTE 12 (page 199). — Démontrer que l'hyperbole s'écarte plus de l'axe des abscisses que de la parabole..... 497

NOTE 13 (page 224). — Seconde démonstration de ce théorème, que, *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle formé par le grand et le petit axe*..... 496

NOTE 14 (page 227). — Seconde manière de démontrer ce théorème, que, *dans l'ellipse, la somme des carrés des diamètres conjugués est égale à la somme des carrés du grand et du petit axe*. 503

NOTE 15 (page 227). — Seconde manière de démontrer que, *dans l'hyperbole, la différence des carrés des diamètres conjugués est égale à la différence des carrés du grand et du petit axe*..... 505

NOTE 16 (page 286)..... 506

NOTE 17 (page 292). — Examen du cas où les constantes F et C de l'équation générale sont de mêmes signes..... 511

NOTE 18 (page 294). — Diverses observations sur le changement de place de l'origine, et démonstrations par l'analyse et par la géométrie, qui tendent à prouver qu'on ne peut faire concourir que simultanément les termes qui contiennent les premières puissances des variables..... *Ib.*

NOTE 19 (page 295). — Examen d'un cas particulier des coordonnées du centre..... 514

NOTE 20 (page 305). — Observations sur les courbes à centre du second ordre..... 515

Pages.

NOTE 21 (page 317). — Des cas particuliers où l'équation générale des courbes du second ordre n'a aucune signification..... 520

NOTE 22 (page 314). — Démonstration de la quadrature de la parabole par la géométrie analytique..... 522

NOTE 23 (page 370). — Seconde manière de trouver les cosinus des angles qu'une droite qui passe par l'origine fait avec les trois axes rectangulaires..... 524

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Errata.

Page 18, ligne 11 (32), *lisez* (30)
72 15 et 16, trigonométriques, *lisez* trigonométriques, pris en établissant une base dans un autre lieu,
72, 18, $BC = 95^{o}$, *lisez* $BC = 95^{m}$
89, 19, pour $EB \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{1}{2}a$, *lisez* pour $EB, \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{1}{2}a$
227, 26 (146) et (153), *lisez* (246) et (253)
413, 11, **425**, *lisez* **625**.

EXPOSITION DES PRINCIPES

DE LA

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

De la mesure des angles.

1. Un principe reconnu dans la Géométrie, est que des cordes égales soutendent des arcs égaux, autrement tous les points de la circonférence seraient à des distances différentes du centre. Il suit de là que si l'on mène (*fig.* 1) des rayons OB, OC, OD aux extrémités de deux cordes égales BC, CD, les triangles BOC, COD, ayant leurs trois côtés égaux, seront égaux, et que par conséquent les angles en O seront aussi égaux. Fig. 1.

2. Concluons de ce qui précède, que si nous inscrivons à la circonférence un polygone régulier de n côtés, comme ces côtés sont égaux, la circonférence sera partagée par ces côtés considérés comme cordes en n arcs égaux, et que ces arcs correspondront à un même nombre d'angles égaux ayant tous leurs sommets au centre O.

3. Les géomètres divisent la circonférence en 360 degrés correspondant à autant d'angles égaux; d'où il suit que la demi-circonférence comprend 180 degrés, et que le quart de la circonférence ou l'angle droit, en renferme 90.

4. Les savants qui ont établi le système métrique, pour donner plus d'uniformité aux calculs, ont adopté l'échelle décimale, en divisant la circonférence en 400 parties égales qu'ils appellent *grades*, ce qui comporte 100 grades pour l'angle droit. Quelques auteurs, croyant même qu'on allait entière-

ment abandonner l'ancienne division, donnent le nom de *degrés* aux grades; mais, comme plusieurs ouvrages des anciens renferment d'importantes observations qu'on est obligé de consulter, et que la plupart de nos Tables, particulièrement celles d'Astronomie, reposent sur l'ancienne division, et que d'ailleurs, 360 a plus de diviseurs que 400, ces raisons ont déterminé beaucoup de géomètres, et surtout les étrangers, à ne pas adopter la nouvelle division. Nous les imiterons donc, en regardant la circonférence comme composée de 360 degrés (*).

Fig. 2. 5. Lorsqu'un angle AOB (*fig.* 2) comprend un certain nombre de degrés, c'est-à-dire d'angles d'un degré chacun, l'arc correspondant AB comprend le même nombre d'arcs d'un degré. C'est pourquoi on dit que l'*arc est la mesure de l'angle*.

Par exemple, si l'on cherche le nombre de degrés d'un angle AOB, et que l'on ait les moyens de reconnaître que l'arc AB renferme 40 petits arcs d'un degré chacun, on est en droit de conclure que l'angle BOA est de 40 degrés.

Ce que nous disons des degrés s'applique aux grades.

6. La détermination des degrés d'un angle se réduisant à celle de la mesure des degrés d'un arc, pour effectuer cette mesure lorsqu'un angle est tracé sur le papier, on se sert du rapporteur, instrument composé d'une demi-circonférence divisée en 180 degrés (la moitié de 360 degrés), et en plaçant
Fig. 3. sur ON (*fig.* 3) un des côtés de l'angle donné, la direction OM de l'autre indiquera, au point où il rencontre la circonférence graduée, le nombre de degrés que comporte cet angle (**).

7. Les angles ne dépendent pas de la longueur des côtés;

(*) On a de même renoncé à la division du jour en 10 heures.

(**) La demi-circonférence du rapporteur est également divisée en degrés, comptés en sens contraire, pour que, suivant le cas, on puisse mesurer un angle, de quelque côté que l'ouverture soit tournée.

car pour un même angle O (*fig.* 4) les arcs AB, A′B′, A″B″, A‴B‴, etc., seront tous du même nombre de degrés, attendu que si l'arc AB est la $n^{ième}$ partie de la circonférence décrite avec le rayon OA, les arcs A′B′, A″B″, A‴B‴, etc., seront chacun la $n^{ième}$ partie des circonférences décrites avec les rayons OA′, OA″, OA‴, etc. Fig. 4.

8. Quoique les arcs qui mesurent les degrés aient peu d'étendue dans de petits cercles, ils peuvent en avoir beaucoup dans des cercles décrits avec de longs rayons; c'est pourquoi on a sous-divisé le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes, la seconde en 60 tierces; et ainsi de suite.

Les signes suivants °, ′, ″, ‴, etc., placés à la partie supérieure des nombres, servent à indiquer ces divisions. Par exemple, lorsqu'on parle d'un angle ou arc de quarante degrés cinquante minutes trente-trois secondes, on désigne ainsi cet arc : 40° 50′ 33″.

9. La mesure des angles serait insuffisante pour nous donner connaissance de tout ce qui constitue un triangle, si nous ne pouvions parvenir à la détermination des rapports des cordes avec le rayon. Ici je ferai une remarque importante : c'est que les cordes ne croissent pas comme les arcs. En effet, quoique les arcs AB, BC, CD, etc. (*fig.* 5), par exemple, soient égaux entre eux et par conséquent comprennent chacun le tiers de l'arc DA, les cordes AC et AD ne sont pas, l'une double et l'autre triple de la corde AB, parce que la corde AC est moindre que la ligne brisée ABC, et qu'il en est de même de la corde AD à l'égard de la ligne brisée ACD, plus petite que le contour polygonal ABCD, triple de la corde AB. Fig. 5.

Cependant, comme, pour une circonférence d'un rayon donné, une corde est nécessairement fixée de grandeur lorsqu'on assigne le nombre de degrés de l'arc correspondant, on entrevoit qu'il existe entre la corde et l'arc une certaine relation qui détermine l'une de ces quantités par l'autre. Les anciens le reconnurent eux-mêmes, et sentirent qu'en circonscri-

vant un cercle à un triangle, les côtés devenant des cordes, la détermination de ces côtés était subordonnée à la liaison qui peut exister entre les angles et les cordes; et que tout ce qui constitue un triangle consistant dans des angles et des côtés, et ces côtés se changeant en cordes par leur inscription au cercle, toute question qui concerne un triangle dépendait des relations qui existent entre les angles et les cordes; relations que nous ferons bientôt connaître.

Voilà ce qui suggéra à Hipparque l'idée d'écrire les XII livres de son *Traité des Cordes*, qui est perdu (*).

10. Les modernes ont substitué aux cordes leurs moitiés, qui, faisant des angles droits avec les rayons du cercle menés sur les milieux de ces cordes, sont plus commodes pour les calculs. Ces moitiés, qu'on appelle des *sinus*, vont faire l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Des lignes trigonométriques et de leurs rapports entre elles.

11. Un angle ou un arc étant compris entre deux rayons OA,
Fig. 6. OM (*fig.* 6), son sinus est la perpendiculaire MP abaissée de l'extrémité M du rayon OM sur le rayon OA.

Si l'on prolonge le sinus MP jusqu'en N, le rayon OA étant perpendiculaire sur le milieu de la corde MN et passant par le milieu de l'arc MN, comme cela est démontré dans la Géomé-

---

(*) Ce Traité, qui devait tenir lieu de nos tables des sinus, est cité par Théon d'Alexandrie, dans ses Commentaires sur l'Almageste. On lit aussi, dans les *Mémoires de la Société asiatique de Calcutta*, que les anciens Brachmanes possédaient des tables peu différentes de celles des sinus.

trie, l'arc MA sera égal à l'arc AN, et PN équivaudra à MP; le sinus MP d'un angle MOA ou d'un arc MA est donc la moitié de la corde d'un arc double.

12. La tangente de l'angle MOA (*fig.* 7) ou de l'arc MA est la perpendiculaire AB élevée à l'extrémité A du rayon OA, et terminée par l'autre rayon prolongé. Ce rayon prolongé OB porte le nom de *sécante*. Fig. 7.

13. Le cosinus d'un angle MOA ou d'un arc MA est le sinus MQ de l'angle COM, complément de l'angle MOA, ou de l'arc CM, complément de l'arc MA. QM valant OP (*), on peut dire que le cosinus est la distance OP du centre au pied P du sinus.

14. Le sinus verse est la distance PA de ce même pied à l'arc.

15. La cotangente d'un angle MOA ou d'un arc MA est la tangente CD du complément de cet angle ou de cet arc.

16. La cosécante est la sécante OD du complément.

17. L'angle droit ayant pour mesure le quart de la circonférence, on aura pour un arc AM représenté par a et appartenant à un rayon $OA = r$:

$$\cos a = \sin\left(\tfrac{1}{4}\text{circ.} - a\right),$$
$$\cot a = \text{tang}\left(\tfrac{1}{4}\text{circ.} - a\right),$$
$$\text{coséc } a = \text{séc}\left(\tfrac{1}{4}\text{circ.} - a\right),$$
$$\text{sin verse } a = r - \cos a.$$

18. Il existe, entre les quantités que nous venons de définir,

(*) Par hypothèse, l'arc CA est égal au quart de la circonférence; donc l'angle COA est droit; il en est de même des angles P et Q, puisque MP et MQ sont des sinus; d'où il résulte que les droites QM et OP sont égales comme parallèles comprises entre parallèles.

ces relations remarquables : dans le triangle rectangle OMP
Fig. 7. (*fig.* 7), on a, par la propriété du carré de l'hypoténuse,

$$MP^2 + OP^2 = OM^2,$$

ou

$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2, \quad \ldots\ldots (1) \quad (*)$$

et les triangles semblables OBA, OMP donnent

$$BA : OA :: MP : OP,$$

ou

$$\text{tang}\, a : r :: \sin a : \cos a;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\text{tang}\, a}{r} = \frac{\sin a}{\cos a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Les mêmes triangles OBA, OMP fournissent cette autre proportion :

$$OP : OA :: OM : OB,$$

ou

$$\cos a : r :: r : \text{séc}\, a;$$

d'où l'on tire également

$$\text{séc}\, a = \frac{r^2}{\cos a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Et si l'on observe que les triangles rectangles OBA, OCD, à cause des angles alternes internes D et AOD, sont aussi semblables, et que leurs côtés homologues sont opposés aux angles égaux, il sera facile d'établir cette proportion

$$BA : OA :: OC : CD,$$

ou

$$\text{tang}\, a : r :: r : \cot a;$$

(*) Le carré, le cube, la 4e puissance, etc., de sin a, de cos a, de tang a, de cot a, de séc a, de coséc a, etc., s'écrivent ainsi : $\sin^2 a$, $\cos^2 a$, $\text{tang}^2 a$, $\cot^2 a$, $\sin^3 a$, $\cos^3 a$, $\text{tang}^3 a$, $\cot^3 a$, $\sin^4 a$, etc., pour ne pas confondre ces expressions avec le sinus, le cosinus, la tangente, etc., de a^2 de a^3, de a^4, etc.

et si l'on compare entre eux les triangles rectangles MOP, COD, qui, à cause des mêmes angles alternes internes, sont aussi semblables, on aura

$$MP : OM :: OC : OD,$$

$$\sin a : r :: r : \text{coséc}\, a;$$

on tire des proportions précédentes ces équations

$$\cot a = \frac{r^2}{\text{tang}\, a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\text{coséc}\, a = \frac{r^2}{\sin a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

D'un autre côté, la propriété du carré de l'hypoténuse nous fournit ces équations

$$OB^2 = OA^2 + AB^2, \quad OD^2 = OC^2 + CD^2,$$

ou $\quad \text{séc}^2 a = r^2 + \text{tang}^2 a, \quad \text{coséc}^2 a = r^2 + \cot^2 a. \quad (6)$

19. Les équations (6) sont comprises dans les cinq autres de l'art. **18**; car on tire de l'équation (3)

$$\text{séc}^2 a = \frac{r^4}{\cos^2 a},$$

et, en divisant par r^2,

$$\frac{\text{séc}^2 a}{r^2} = \frac{r^2}{\cos^2 a};$$

remplaçant le numérateur du second membre par sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$\frac{\text{séc}^2 a}{r^2} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a}$$

ou

$$\frac{\text{séc}^2 a}{r^2} = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1;$$

et à l'aide de l'équation (2) élevée au carré, cette dernière devient

$$\frac{\text{séc}^2 a}{r^2} = \frac{\text{tang}^2 a}{r^2} + 1;$$

faisant évanouir le dénominateur, on obtient

$$\text{séc}^2 a = \text{tang}^2 a + r^2,$$

et nous reconnaissons ici la première des équations (6).

A l'égard de la seconde des équations (6), l'équation (5) élevée au carré donne

$$\text{coséc}^2 a = \frac{r^4}{\sin^2 a},$$

ou, en divisant par r^2,

$$\frac{\text{coséc}^2 a}{r^2} = \frac{r^2}{\sin^2 a};$$

éliminant le numérateur du second membre à l'aide de l'équation (1), on obtient

$$\frac{\text{coséc}^2 a}{r^2} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}$$

ou

$$\frac{\text{coséc}^2 a}{r^2} = 1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

d'une autre part, l'équation (2) élevée au carré nous donne

$$\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{r^2}{\text{tang}^2 a};$$

substituant cette valeur dans l'équation (7), on obtient

$$\frac{\text{coséc}^2 a}{r^2} = 1 + \frac{r^2}{\text{tang}^2 a};$$

chassant le dénominateur r^2, cette équation devient

$$\text{coséc}^2 a = r^2 + \frac{r^4}{\text{tang}^2 a};$$

valeur qui, au moyen de l'équation (4) élevée au carré, se convertit en

$$\text{coséc}^2 a = r^2 + \cot^2 a,$$

et reproduit la seconde des équations (6).

20. On prend quelquefois le rayon pour unité, ce qui simplifie les formules; dans cette hypothèse les équations (1) et (2) deviennent

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

et les équations (3), (4) et (5) se changent en

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{1}{\text{tang}\, a}, \quad \text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a}. \quad (10)$$

21. Il est facile de passer des formules où cette hypothèse a lieu, à celles où le rayon est désigné par r. Pour cela il suffit de remplacer les expressions $\sin a$, $\cos a$, $\text{tang}\, a$, $\cot a$, $\text{séc}\, a$, $\text{coséc}\, a$, par celles-ci :

$$\frac{\sin a}{r}, \quad \frac{\cos a}{r}, \quad \frac{\text{tang}\, a}{r}, \quad \frac{\cot a}{r}, \quad \frac{\text{séc}\, a}{r}, \quad \frac{\text{coséc}\, a}{r};$$

en opérant ainsi sur les équations (8), (9) et (10), on retombera sur les équations (1), (2), (3), (4) et (5).

22. Pour le démontrer, soient (*fig.* 8) MA et NB des arcs a et a' décrits avec les rayons $OA = 1$ et $OB = r$, et MP, NQ, OP, OQ les sinus et les cosinus de ces arcs, et AK, BL leurs tangentes, nous aurons Fig. 8.

$$OM : ON :: MP : NQ :: OP : OQ :: AK : BL,$$

ou $1 : r :: \sin a : \sin a' :: \cos a : \cos a' :: \text{tang}\, a : \text{tang}\, a'$; (11)

nous tirerons de là

$$\sin a = \frac{\sin a'}{r}, \quad \cos a = \frac{\cos a'}{r}, \quad \text{tang}\, a = \frac{\text{tang}\, a'}{r}; \quad . \quad . \quad (12)$$

substituant ces valeurs dans les équations (8) et (9), nous aurons

$$\frac{\sin^2 a'}{r^2} + \frac{\cos^2 a'}{r^2} = 1, \quad \frac{\text{tang}\, a'}{r} = \frac{\sin a'}{\cos a'}, \quad (13)$$

et comme dans ces équations il ne reste aucune trace de l'arc a, nous pourrons supprimer les accents, en convenant que a ne représentera plus l'arc décrit avec le rayon 1, mais avec le rayon r; et si nous faisons évanouir le dénominateur r^2 de la

première des équations (13), nous obtiendrons

$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2, \quad \frac{\operatorname{tang} a}{r} = \frac{\sin a}{\cos a};$$

ce qui nous fait retomber sur les équations (1) et (2).

La même démonstration peut s'appliquer à toutes les autres valeurs trigonométriques qui dans les deux cercles sont des lignes proportionnelles.

23. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que, dans ces substitutions, il faut bien se garder de remplacer l'unité par r; car la valeur de l'unité ne serait égale à r que dans le cas où les arcs a et a' de l'art. **22** coïncideraient. En effet, la première des équations (12) nous donne

$$1 = r \frac{\sin a}{\sin a'},$$

équation qui nous montre que l'unité ne peut être remplacée par r que dans le cas où a' se réduit à a, et où par conséquent l'arc a' devient celui qui serait décrit avec le rayon r.

CHAPITRE III.

De la correspondance des lignes trigonométriques avec les différents arcs de cercle.

Fig. 9. **24.** Soit (*fig.* 9) une circonférence décrite avec le rayon OB $= r$, en prenant O pour centre; nous avons dit, art. **11**, que le sinus d'un arc BM est la perpendiculaire MP, abaissée d'un point M sur la droite OB qui fait un angle MOB avec elle; et que le cosinus est la partie OP du rayon OB interceptée par le sinus; de sorte que, faisant tourner la droite OM en l'écartant de OB, si nous faisons croître l'angle, nous aurons successivement

$$\sin BM = MP, \quad \cos BM = OP,$$
$$\sin BM' = M'P', \quad \cos BM' = OP',$$
$$\sin BM'' = M''P'', \quad \cos BM'' = OP'',$$
$$\sin BM''' = M'''P''', \quad \cos BM''' = OP''';$$

et nous verrons que le sinus s'accroît continuellement, et que le cosinus au contraire diminue jusqu'à ce que le rayon OM, devenant perpendiculaire à OB, prenne la position OD. Dans ce cas, il atteint son maximum d'accroissement, et, pour cette raison, porte alors le nom de sinus total; et il est évident que le cosinus est nul.

25. Continuons de suivre le rayon dans son mouvement et examinons ce qui se passe lorsque l'angle BOM (*fig.* 10) devient obtus. Le sinus, d'après sa définition, étant la perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un rayon sur la direction de l'autre avec lequel il forme l'angle, deviendra MP; d'où il suit que l'angle obtus BOM a le même sinus que l'angle MOP qui est son supplément. A l'égard du cosinus, il est certain qu'il deviendra OP. Or, comme les lignes sont en quelque sorte la peinture des nombres, et qu'un nombre qui a décru continuellement jusqu'à devenir zéro et continue à décroître, ne peut le faire qu'en devenant négatif; c'est déjà un indice que le cosinus qui appartient à un angle obtus est négatif. Fig. 10.

26. Examinons la chose de plus près.

Pour cela décrivons dans l'angle droit YAX (*fig.* 11) avec le rayon 1 une circonférence BME; et du centre O de ce cercle, menons $OL = \alpha$, $OH = \beta$ perpendiculaires l'une à AY et l'autre à AX; puis d'un point M pris sur un arc $BM = a$ de plus de 90 degrés, menons les parallèles MP et MQ à OH et à OL, nous aurons évidemment Fig. 11.

$$\left.\begin{array}{lll} MP = OH + MI, & MQ = OL - OI, \\ \text{ou } MP = \beta + \sin a, & MQ = \alpha - \cos a, \end{array}\right\} \quad (14)$$

et nous voyons que dans cette partie de l'arc le sinus est positif, tandis que le cosinus est négatif.

La position du point A étant arbitraire, puisque rien n'a déterminé la distance du centre O à ce point, transportons-le de A en O; alors les perpendiculaires $OH = 6$ et $OL = \alpha$ disparaîtront; mais nous nous réservons la faculté de placer ces lignes où nous voudrons, et les équations (13) se réduiront à

$$MI = \sin a, \quad OI = -\cos a;$$

et l'on voit que ces valeurs ne seront plus que des espèces d'abréviations, ou pour mieux dire, exprimeront des conventions sous-entendues.

Fig. 12. **27.** Il résulte de ce qui précède que le sinus est nul au point B (*fig.* 12) où le rayon OM est confondu avec OB; mais qu'à mesure que OM s'écarte de OB, l'angle augmente, le sinus MP s'accroît, le cosinus OP diminue, et restent l'un et l'autre positifs, jusqu'à ce que OM fasse avec OB un angle de 90 degrés, cas où le sinus devenu égal au rayon est parvenu à sa plus grande longueur OD, et le cosinus est nul. Passé ce terme, le sinus restant toujours positif, décroît jusqu'à devenir zéro au point où l'arc atteint 180 degrés, tandis que le cosinus, quand l'arc surpasse 90 degrés, prend une valeur négative qui s'accroît jusqu'à ce que cet arc soit de 180 degrés, cas où le cosinus devient égal à $-r$.

28. Tout ce que nous venons de dire se résume de la sorte :

Pour l'arc 0, $\sin a = 0$, $\cos a = r$.

Pour l'arc moindre que le quart de la circonférence, à mesure que cet arc s'accroît et à partir de zéro, le sinus s'accroît aussi et le cosinus diminue, restant l'un et l'autre positifs.

Pour l'arc d'un quart de la circonférence

$$\sin a = r, \quad \cos a = 0.$$

Pour l'arc compris entre le quart et la moitié de la circonférence, à mesure que l'arc s'accroît, le sinus décroît et reste positif, tandis que le cosinus augmente et reste négatif.

Pour l'arc qui comprend la moitié de la circonférence,

$$\sin a = 0, \quad \cos a = -r.$$

29. Il semblerait que l'angle devenant nul lorsqu'il a atteint 180 degrés, on ne devrait plus admettre d'arc au delà de cette limite; mais cette considération n'entre point dans l'esprit de l'analyse, qui, tendant à généraliser, considère des arcs plus grands que 180 degrés. Dans ce cas, lorsque l'arc continue à croître, et tant qu'il n'a pas atteint les trois quarts de la circonférence, le sinus dont l'extrémité tombe sur l'un des points de l'arc est négatif aussi bien que le cosinus; mais depuis les trois quarts de la circonférence jusqu'à une révolution entière du rayon, le sinus restant négatif, le cosinus redevient positif et va toujours en croissant, et finit par devenir égal à l'unité, et alors le sinus est nul.

30. On ne s'arrête pas là : l'arc peut croître indéfiniment en faisant divers circuits; mais arrivé à 360 degrés, toutes les circonstances qui ont eu lieu jusque-là se reproduisent, de sorte que le même sinus peut appartenir à un nombre infini d'arcs qui différeront entre eux d'une fois, deux fois, trois fois, etc., la circonférence. [*Note première* (*).]

31. Occupons-nous maintenant de la tangente. On voit d'abord qu'elle s'accroît plus rapidement que le sinus, car lorsque l'angle TOB (*fig.* 13) vaut la moitié d'un angle droit, l'angle OTB en est l'autre moitié; par conséquent, le triangle devient isocèle, et la tangente, dans ce cas, est égale au rayon. Lorsque l'angle s'ouvre davantage, la tangente s'accroît de plus en plus jusqu'à ce que l'arc atteigne 90 degrés. Fig. 13.

D'ailleurs, puisque dans ce cas le sinus augmente et le cosinus diminue (art. 27), l'équation (2), d'où l'on tire $\operatorname{tang} a = r\frac{\sin a}{\cos a}$, nous montre que les deux termes de la fraction contribuent simultanément à l'accroissement de sa valeur.

Enfin quand l'angle comprend le quart de la circonférence, la sécante, prenant la direction de OD (*fig.* 14), devient parallèle à la tangente, qui, par conséquent, est infinie. Fig. 14.

(*) *Voyez* les Notes à la fin du volume.

32. L'angle devient obtus (*fig.* 14) lorsque l'arc surpasse 90 degrés. Dans ce cas la tangente BT′ ne peut atteindre la direction de la sécante qu'en un point T′ sur le prolongement de cette sécante; ce qui montre que la tangente est alors négative. C'est d'ailleurs ce qu'indique la formule $\text{tang}\, a = r \frac{\sin a}{\cos a}$, dans laquelle $\sin a$ restant positif, $\cos a$ devient négatif, ce qui est cause que $\text{tang}\, a$ est une quantité négative.

Il est bon de remarquer que, dans ce cas, la tangente est égale à celle du supplément de l'angle obtus MOB; car l'angle MOC, supplément de l'angle obtus MOB, est égal à son opposé au sommet BOT′.

La tangente négative diminue continuellement à mesure que l'arc s'approche de la demi-circonférence; de sorte que quand l'arc devient égal à la demi-circonférence, la tangente est nulle.

C'est d'ailleurs ce qui résulte de la formule (2) (art. 18); car, dans ce cas, le sinus étant égal à zéro et le cosinus à $-r$, on a (*Note deuxième*)

$$\text{tang}\, a = -\frac{0}{r} = 0.$$

CHAPITRE IV.

Détermination des principales formules trigonométriques.

33. Trouver le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs.

Fig. 15. Soient (*fig.* 15) AB $= a$, BC $= b$ deux arcs, dont BH et CI sont les sinus. Prolongeons CI jusqu'à la rencontre de la circonférence en E : le sinus CI étant perpendiculaire au rayon OB, ce rayon partagera la corde CE en deux parties égales au point I. Menons EL, IQ et CP parallèles au sinus BH et par conséquent

perpendiculaires à OA ; menons aussi IF et ED perpendiculaires à CP : ces droites étant parallèles à OA , le seront entre elles.

Cela posé, les triangles rectangles CIF, IEG seront égaux; car outre les angles droits en F et en G , ils ont encore les angles CIF, IEG égaux comme correspondants : donc les troisièmes angles sont égaux ; et, comme les parties CI et IE de la corde CE sont égales, nous avons dans ces triangles les côtés CI et IE compris entre les deux angles égaux; d'où il résulte l'égalité de ces triangles ;

donc $$FI = GE; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

mais, les parallèles comprises entre parallèles étant égales, nous avons

$$FI = PQ;$$

donc, en vertu de l'équation (15),

$$PQ = GE.$$

Observons encore que le rayon OB, qui passe par le milieu de la corde, passe aussi par le milieu de l'arc, c'est-à-dire que

$$\text{arc CB} = \text{arc BE};$$

mais arc CB $= b$, donc aussi arc BE $= b$, et par conséquent

$$\text{arc EA} = \text{arc BA} - \text{arc BE} = a - b;$$

et comme par construction , nous avons

$$\text{arc AC} = \text{arc BA} + \text{arc BC} = a + b;$$

nous voyons donc que tout se réduit à trouver les sinus et cosinus des arcs EA $= a - b$ et AC $= a + b$.

Or on a évidemment

$$\sin(a+b) = CP = FP + CF = IQ + CF, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\cos(a+b) = OP = OQ - PQ = OQ - FI, \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\sin(a-b) = EL = IQ - IG = IQ - CF, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$
$$\cos(a-b) = OL = OQ + QL = OQ + GE = OQ + FI. \quad (19)$$

Il ne s'agit plus que de trouver les valeurs de ces quatre lignes IQ, OQ, FI, CF. Pour cet effet, les triangles semblables OBH, OIQ donnent les proportions :

$$OB : BH :: OI : IQ, \quad OB : OH :: OI : OQ,$$

ou $\quad r : \sin a :: \cos b : IQ, \quad r : \cos a :: \cos b : OQ;$

donc $\quad IQ = \dfrac{\sin a \cos b}{r}, \quad OQ = \dfrac{\cos a \cos b}{r}.$

D'une autre part, les triangles semblables BOH, CIF, qui ont leurs côtés perpendiculaires, donnent les proportions :

$$OB : BH :: IC : FI, \quad OB : OH :: IC : CF,$$

ou $\quad r : \sin a :: \sin b : FI, \quad r : \cos a :: \sin b : CF;$

donc $\quad FI = \dfrac{\sin a \sin b}{r}, \quad CF = \dfrac{\cos a \sin b}{r}.$

Mettant les valeurs de IQ, de OQ, de IF et de CF dans les équations (16), (18), (17) et (19), on en tire :

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{r}, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{r}, \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r}, \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{r}. \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

34. Ces quatre équations peuvent se réduire à deux en les écrivant de cette manière :

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{r}, \quad \ldots \quad (24)$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{r}; \quad \ldots \quad (25)$$

mais alors les signes supérieurs doivent être lus ensemble; il en est de même des inférieurs. (*Note troisième.*)

35. Ces équations se simplifient encore si l'on prend le rayon pour unité, car alors elles deviennent

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \quad \ldots \quad (26)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b. \quad \ldots \quad (27)$$

36. Si dans les formules (20) et (22) on fait $b = a$, on trouvera

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{r}, \quad \cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{r}; \quad (28)$$

et si l'on fait $b = 2a$ dans ces mêmes formules (20) et (22), on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} \sin 3a &= \frac{\sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a}{r}, \\ \cos 3a &= \frac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{r}; \end{aligned}\right\} \ldots \quad (29)$$

remplaçant $\sin 2a$ et $\cos 2a$ par leurs valeurs tirées des équations (28), et réduisant, on trouvera

$$\sin 3a = \frac{3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a}{r^2},$$

$$\cos 3a = \frac{\cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a}{r^2};$$

en faisant ensuite $b = 3a$, $b = 4a$, etc., on trouverait de même les valeurs de $\sin^4 a$, de $\cos^4 a$, de $\sin^5 a$, de $\cos^5 a$, etc.

37. Résolvons maintenant la question inverse : soient BD
Fig. 16. (*fig.* 16) le sinus d'un arc BA, OD son cosinus, et r le rayon OC. Il est évident que le sinus de l'arc BC, moitié de l'arc BA, représenté par a, sera BI. Or les triangles OIA et BDA, rectangles en I et en D, sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en A ; et, comme les côtés homologues sont opposés aux angles égaux, on a la proportion

$$\text{OA} : \text{BA} :: \text{AI} : \text{AD},$$

ou $$r : 2 \sin \tfrac{1}{2} a :: \sin \tfrac{1}{2} a : r - \cos a;$$

d'où l'on tire

$$(\sin \tfrac{1}{2} a)^2 = \tfrac{1}{2} r (r - \cos a), \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

et en passant à la racine

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} r (r - \cos a)};$$

observant que la valeur négative se rapporte au sinus de l'autre moitié de l'arc, c'est-à-dire au sinus de CA, cette valeur nous devient inutile. Nous nous bornerons donc à écrire

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\tfrac{1}{2} r (r - \cos a)}. \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

38. Pour trouver le cosinus de la moitié de l'angle ou de l'arc a, nous remarquerons d'abord que cet arc a étant quelconque, nous pouvons le remplacer par $\frac{1}{2} a$ dans la seconde des équations (28) ; et alors cette équation deviendra, après avoir fait évanouir le numérateur r,

$$r \cos a = \cos^2 (\tfrac{1}{2} a) - \sin^2 (\tfrac{1}{2} a); \quad \ldots \quad (32)$$

et si nous changeons également a en $\frac{1}{2} a$ dans l'équation (1) (*page* 6), nous obtiendrons

$$r^2 = \cos^2 (\tfrac{1}{2} a) + \sin^2 (\tfrac{1}{2} a).$$

Ajoutant entre elles ces équations, et réduisant, il restera

$$r (r + \cos a) = 2 \cos^2 (\tfrac{1}{2} a);$$

d'où nous tirerons

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}a\right) = \tfrac{1}{2}r(r + \cos a);$$

et en passant à la racine,

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{2}r(r + \cos a)}. \quad . \; . \; . \; (33)$$

Nous ne mettons pas le double signe, puisque le cosinus que nous considérons est essentiellement positif.

39. Les équations (31) et (33) donnent les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$ et de $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\cos a$; mais, lorsqu'on en veut faire usage, pour passer de $\sin a$ à $\sin\frac{1}{2}a$, on est obligé de chercher préliminairement la valeur de $\cos a$, à l'aide de la formule

$$\cos a = \sqrt{r^2 - \sin^2 a},$$

tirée de l'équation (1); tandis que si les valeurs de $\cos\frac{1}{2}a$ et de $\sin\frac{1}{2}a$ étaient données en fonction de $\sin a$, on aurait une opération de moins à faire. Or il est très-facile d'obtenir $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$.

Pour cela, si, dans la première des équations (28), on change de membres, et qu'on remplace $2a$ par a, on obtiendra

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}a = r\sin a,$$

et, en changeant également a en $\frac{1}{2}a$ dans l'équation (1), on trouvera

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}a = r^2.$$

La première de ces équations étant ajoutée à la seconde, et ensuite retranchée de la même, nous aurons

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a + 2\sin\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}a = r^2 + r\sin a, \quad . \; . \; (34)$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a - 2\sin\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}a = r^2 - r\sin a. \quad . \; . \; (35)$$

Les premiers membres des équations (34) et (35) étant des carrés parfaits, nous pourrons les écrire de cette manière, en passant à la racine et en mettant r en facteur commun dans le second membre :

$$\cos\tfrac{1}{2}a + \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{r(r + \sin a)}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a - \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{r(r - \sin a)}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

Retranchant l'équation (37) de l'équation (36), on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{r(r + \sin a)} - \sqrt{r(r - \sin a)}\right]. \quad . \; . \; (38)$$

En ajoutant ensuite la seconde à la première, on trouvera

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{r(r + \sin a)} + \sqrt{r(r - \sin a)}\right] (*). \quad . \quad (39)$$

40. Toutes les formules que nous avons données jusqu'à présent sur les sinus et les cosinus, font dépendre ces quantités les unes des autres; aussi est-il essentiel de fixer un point de départ, en faisant voir comment, un rayon étant donné, on peut parvenir à déterminer le sinus d'un certain arc, dans quelques polygones réguliers. (*Note quatrième.*)

(*) Remarquons que le second membre de l'équation (35) est essentiellement positif, par la raison que le rayon surpasse le sinus; et comme un carré positif provient aussi bien d'une racine positive que d'une racine négative, considérons d'abord la première hypothèse : dans ce cas le radical du second membre de l'équation (37) étant positif, il en sera de même du premier membre de cette équation; ce qui ne peut être, à moins que $\cos \frac{1}{2} a$ ne surpasse $\sin \frac{1}{2} a$. Or dans l'angle de 45 degrés (ou de 50 grades), l'angle OED (*fig.* 17) étant égal à l'angle O, le triangle OED est isocèle, et par conséquent les droites OD et ED sont égales; et comme les sinus, en se rapprochant du point A, diminuent de valeurs tandis que les cosinus s'accroissent, il est constant que pour tout arc moindre que 45 degrés, le cosinus surpassera le sinus; tandis que, pour tout arc compris depuis 45 degrés jusqu'à 90 degrés, le sinus l'emportera sur le cosinus. Il suit de là que puisque nous supposons le premier membre de l'équation (37) positif, il faut nécessairement que l'arc EA (*fig.* 18) soit moindre que 45 degrés; mais si, au lieu de l'équation (37), nous eussions écrit celle-ci :

$$\sin \tfrac{1}{2} a - \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{r(r - \sin a)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

l'arc serait plus grand que 45 degrés; et, en retranchant l'équation (40) de l'équation (36), on aurait obtenu

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{r(r + \sin a)} - \sqrt{r(r - \sin a)}\right];$$

tandis qu'en ajoutant la même équation (40) à l'équation (36), on eût trouvé

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{r(r + \sin a)} + \sqrt{r(r - \sin a)}\right];$$

ce qui montre que, dans les deux hypothèses, le sinus et le cosinus changeraient réciproquement de valeurs.

Si nous prenons, par exemple, l'hexagone, et que nous abaissions une perpendiculaire OE sur son côté AB (*fig.* 18), cette perpendiculaire, comme on le démontre dans la Géométrie, passera par le milieu de ce côté et de l'arc qui le soutient. Or, le côté de l'hexagone étant égal au rayon, et l'arc AE à la douzième partie de la circonférence, c'est-à-dire de 30 degrés, il en résulte que l'angle AOE aura pour sinus AD, moitié du rayon; ce que nous exprimerons par cette équation Fig. 18.

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} r.$$

41. Considérons encore le triangle équilatéral (*fig.* 19); si l'on abaisse une perpendiculaire OE sur le côté CB, elle divisera l'arc CEB en deux parties égales; par conséquent, l'arc CE sera la sixième partie de la circonférence, et la corde CE équivaudra au rayon r; donc le triangle COE ayant les côtés CE, CO égaux, sera isocèle; d'où il suit que les deux triangles rectangles CDO, CDE seront égaux, et qu'on aura $OD = DE$, et par conséquent $OD = \frac{1}{2} r$. Mettant cette valeur et celles de CD et de OC dans l'équation Fig. 19.

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2},$$

nous aurons

$$\sin 60^\circ = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3}.$$

42. Le carré nous conduit à une autre expression de sinus En effet, soit BC le côté du carré; si l'on partage ce côté en deux parties égales par la perpendiculaire OE, l'angle BOE (*fig.* 20) sera de 45 degrés; donc l'angle OBD, qui en est le complément, sera aussi de 45 degrés : d'où il suit que $OD = BD$, et que l'équation Fig. 20.

$$OD^2 + BD^2 = OB^2,$$

qui résulte de la propriété du carré de l'hypoténuse, deviendra

$$2BD^2 = r^2,$$

et par conséquent

$$BD = \frac{2r^2}{4};$$

passant à la racine,

$$BD = \tfrac{1}{2} r\sqrt{2},$$

ou

$$\sin 45^\circ = \tfrac{1}{2} r\sqrt{2}.$$

43. On démontre, en Géométrie, que le côté du décagone régulier est égal à la moyenne partie du rayon divisé en moyenne et extrême raison. Cela peut encore servir à trouver le sinus en fonction du rayon: Fig 21. en effet, soit x (*fig.* 21) la moyenne partie du rayon, on a

$$r : x :: x : r - x,$$

par conséquent

$$x^2 + rx = r^2;$$

résolvant cette équation du deuxième degré en ne prenant que la partie supérieure du radical (*), parce que le sinus est essentiellement positif, nous aurons

$$x + \tfrac{1}{2} r = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2} r\sqrt{5}.$$ (*Note cinquième.*)

44. Déterminons maintenant la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs. Pour cela, faisant $a = a \pm b$ dans l'équation (2), nous trouverons

$$\frac{\tang(a \pm b)}{r} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)};$$

substituant dans cette équation les valeurs des deux termes du second membre fournies par les équations (24) et (25), nous obtiendrons

$$\frac{\tang(a \pm b)}{r} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}.$$

Divisant tous les termes par $\cos a \cos b$, et réduisant, nous obtiendrons

$$\frac{\tang(a \pm a)}{r} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} \pm \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \dfrac{\sin a}{\cos a}\dfrac{\sin b}{\cos b}};$$

(*) Nous verrons (art. **138**) ce que signifie cette valeur.

remplaçant $\frac{\sin a}{\cos a}$ et $\frac{\sin b}{\cos b}$ par leurs valeurs indiquées par l'équation (2), nous aurons

$$\frac{\tang(a \pm b)}{r} = \frac{\frac{\tang a}{r} \pm \frac{\tang b}{r}}{1 \mp \frac{\tang a}{r}\,\frac{\tang b}{r}};$$

et, en multipliant par r^2 les deux termes du second membre,

$$\frac{\tang(a \pm b)}{r} = \frac{r(\tang a \pm \tang b)}{r^2 \mp \tang a \tang b};$$

faisant évanouir le dénominateur du premier membre, on obtiendra enfin

$$\tang(a \pm b) = \frac{r^2(\tang a \pm \tang b)}{r^2 \mp \tang a \tang b}. \quad . \; . \; (41)$$

45. On déterminerait de même la valeur de $\cot(a \pm b)$; car l'équation (4) nous donnerait

$$\cot(a \pm b) = \frac{r^2}{\tang(a \pm b)};$$

mettant dans cette équation la valeur de $\tang(a \pm b)$ donnée par l'équation (41), on aurait

$$\cot(a \pm b) = \frac{r^2}{\frac{r^2(\tang a \pm \tang b)}{r^2 \mp \tang a \tang b}};$$

multipliant les deux termes de cette fraction par $r^2 \mp \tang a \tang b$, pour faire évanouir le dénominateur du dénominateur, nous trouverons

$$\cot(a \pm b) = \frac{r^2 \mp \tang a \tang b}{\tang a \pm \tang b};$$

remplaçant $\tang a$ et $\tang b$ par leurs valeurs déterminées par l'équation (4), on aurait

$$\cot(a \pm b) = \frac{r^2 \mp \frac{r^2}{\cot a}\,\frac{r^2}{\cot b}}{\frac{r^2}{\cot a} \pm \frac{r^2}{\cot b}};$$

divisant les deux termes par r^2, il resterait

$$\cot(a \pm b) = \frac{1 \mp \frac{r^2}{\cot a \cot b}}{\frac{1}{\cot a} \pm \frac{1}{\cot b}};$$

et en multipliant les deux termes du second membre par $\cot a \cot b$, on trouverait enfin

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp r^2}{\cot b \pm \cot a}.$$

46. On parvient encore, de la manière suivante, à des expressions trigonométriques remarquables : en changeant de place les deux membres des équations (20) et (21), on trouve, en prenant la somme et ensuite la différence,

$$\sin a \cos b = \frac{r}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)], \quad (42)$$

$$\cos a \sin b = \frac{r}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]. \quad (43)$$

Opérant de même sur les équations (22) et (23), ces équations donneront

$$\cos a \cos b = \frac{r}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)], \quad (44)$$

$$\sin a \sin b = \frac{r}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \quad (45)$$

Ces formules vont nous conduire à un théorème important, dont nous ferons un grand usage par la suite.

Pour arriver à ce but, faisons

$$a + b = \alpha, \quad a - b = \beta;$$

en ajoutant ces équations et en les retranchant ensuite l'une de l'autre, nous trouverons

$$a = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad b = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Au moyen de ces valeurs, les équations (42) et (43) deviendront

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{r}{2}(\sin\alpha+\sin\beta), \quad (46)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{r}{2}(\sin\alpha-\sin\beta); \quad (47)$$

divisant l'équation (46) par l'équation (47), on aura

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta},$$

ou $$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \times \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta},$$

ou $$\tang(\alpha+\beta) \times \frac{1}{\tang(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta},$$

ou $$\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}.$$

On tire de là cette proportion

$$\sin\alpha+\sin\beta : \sin\alpha-\sin\beta :: \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

ce qui nous donne ce théorème : *La somme des sinus de deux arcs est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

47. Ce théorème se démontre aussi par la Géométrie, de la manière suivante :

Soient (*fig.* 22) les arcs AM $= \alpha$, AN $= \beta$, nous aurons donc Fig. 22.

$$MR = \sin\alpha, \quad NP = \sin\beta;$$

et en prolongeant MR jusqu'à la rencontre de la circonférence, nous aurons aussi

$$LR = \sin\alpha.$$

Ces sinus étant perpendiculaires au diamètre BA, menons par le point N la droite NC parallèle à ce diamètre, et par conséquent perpendiculaire à NP; tirons ensuite les cordes CM, CL; et enfin, avec le rayon des tables représenté par CD, décrivons l'arc EDI, et menons

au point D une tangente DE, que nous prolongerons jusqu'en F; cette tangente sera parallèle à nos deux sinus.

Fig. 22. Cela posé, les triangles CQL, CDF, formés par les parallèles ML, EF, donnent la proportion

$$QL : DF :: CQ : CD;$$

et les triangles semblables CQM, CDE donnent

$$MQ : DE :: CQ : CD.$$

Les seconds rapports de ces proportions étant identiques, on obtient, en égalant les premiers,

$$QL : DF :: MQ : DE;$$

et en changeant les moyens, on a

$$QL : MQ :: DF : DE. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Examinons ce que sont les quatre termes de cette proportion; il est d'abord évident qu'on a

$$QL = RL + QR = MR + NP = \sin\alpha + \sin\beta,$$
$$MQ = MR - QR = MR - NP = \sin\alpha - \sin\beta;$$

et, en résumé,

$$QL = \sin\alpha + \sin\beta, \quad MQ = \sin\alpha - \sin\beta. \quad \ldots\ldots (49)$$

A l'égard des deux derniers termes de la proportion (48), remarquons que les angles NCL, MCN, ayant leurs sommets appuyés sur la circonférence AML, auront pour mesure, comme cela est démontré dans la Géométrie, la moitié des arcs NAL, MN compris entre leurs côtés; et comme les arcs compris dans les angles NCL, NCM sont respectivement

$$AL + AN = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad AM - AN = \alpha - \beta,$$

nous aurons, pour les tangentes DF et DE,

$$DF = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad \text{et} \quad DE = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad \ldots (50)$$

Substituant dans la proportion (48) les valeurs de quatre termes données par les équations (49) et (50), nous obtiendrons, comme dans l'art. **46**,

$$\sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

CHAPITRE V.

De la construction des tables des sinus.

48. Les cordes, comme nous l'avons vu (art. 6), ne croissent pas proportionnellement aux arcs. Il en est donc de même des sinus, qui sont leurs moitiés; mais plus l'arc est petit, moins il diffère de son sinus. C'est ce qui deviendra encore plus sensible après qu'on aura démontré que l'arc est plus petit que la tangente, et plus grand que le sinus. En effet, soit AM (*fig.* 23) un arc dont MT est la tangente et MP le sinus; si l'on prend AM′ = AM, et qu'on représente par M′T la tangente de cet arc, les deux tangentes étant égales et de même inclinaison sur OT, coïncideront en T, et l'on aura Fig. 23.

$$M'T = MT \quad \text{et} \quad M'P = MP.$$

Or il est évident que la ligne brisée MTM′ surpasse l'arc MAM′ qu'elle enveloppe, et que la corde MM′ est moindre que l'arc MAM′, qui l'entourant, n'est pas le plus court chemin pour arriver de M à M′.

Par conséquent la moitié de MTM′, qui est la tangente MT, surpasse MA, moitié de l'arc MM′; et le sinus MP, moitié de la corde MM′, est moindre que MA.

Cela posé, l'équation (2) (art. 18), dans laquelle on fait $r = 1$, nous donnant

$$\frac{\text{tang}\, a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

et le cosinus (art. 24) tendant vers l'unité à mesure que l'arc diminue, on voit qu'il en sera de même de $\frac{1}{\cos a}$, par suite, de $\frac{\text{tang}\, a}{\sin a}$, et à plus forte raison, de $\frac{\text{tang}\, a}{\text{arc}\, a}$, fraction dont les termes s'approchent encore plus de l'égalité, parce que, suivant ce qu'on vient de démontrer, l'arc surpasse le sinus.

Et comme l'arc est nul lorsque le cosinus est 1, il s'ensuit que le rapport $\frac{\text{tang}\, a}{\text{arc}\, a}$ ne devient jamais égal à l'unité, mais peut s'en approcher à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, ou de tel rang décimal qu'on voudra, ce qui suffit pour les tables, si l'on se borne à un petit nombre de décimales en les construisant.

Cette détermination nous fait sentir la nécessité d'assigner une limite à la petite erreur que l'on commet en substituant l'arc au sinus, lorsque les lignes trigonométriques ont peu d'étendue. C'est l'objet qui va nous occuper.

Pour cet effet, soit a un arc très-petit; la tangente de cet arc, comme on l'a démontré, le surpassera donc d'une très-petite quantité positive; en sorte que si nous désignons par δ l'excès de tang $\frac{1}{2}a$ sur $\frac{1}{2}a$, nous aurons

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a + \delta,$$

ou, en vertu de l'équation (2) (art. 18),

$$\frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} = \tfrac{1}{2}a + \delta;$$

faisant évanouir le dénominateur, nous aurons

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a + \delta \cos \tfrac{1}{2}a;$$

multipliant les deux membres par $2\cos\frac{1}{2}a$, il viendra

$$2 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a = a \cos^2 (\tfrac{1}{2}a) + 2\delta \cos^2 (\tfrac{1}{2}a); \quad . \quad . \quad (52)$$

mais si dans la première des équations (28) on fait $2a = a$ et $r = 1$, on trouvera

$$2 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a = \sin a.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (52), cette équation deviendra

$$\sin a = a \cos^2 (\tfrac{1}{2}a) + 2\delta \cos^2 (\tfrac{1}{2}a);$$

mettant dans le premier terme du second membre la valeur $\cos^2 \frac{1}{2} a$, tirée de l'équation (1), qui donne, pour le cas où l'on remplace r par l'unité,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a + \cos^2 \tfrac{1}{2} a = 1,$$

on obtiendra

$$\sin a = a - a \sin^2 \tfrac{1}{2} a + 2\delta \cos^2 (\tfrac{1}{2} a); \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

mais, d'après notre lemme, $\frac{1}{2} a$ surpasse $\sin \frac{1}{2} a$; soit ε la différence : nous aurons donc

$$\tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} a + \varepsilon;$$

et, en élevant au carré, nous trouverons

$$\tfrac{1}{4} a^2 = \sin^2 (\tfrac{1}{2} a) + 2\varepsilon \sin \tfrac{1}{2} a + \varepsilon^2.$$

Observant que ε est facteur commun des deux derniers termes du second membre de celle-ci, nous pourrons représenter ces deux derniers termes par εk, quantité essentiellement positive, puisque ε et $\sin \frac{1}{2} a$ le sont par hypothèse.

L'équation précédente nous donnera

$$\tfrac{1}{4} a^2 = \sin^2 (\tfrac{1}{2} a) + \varepsilon k;$$

on tire de cette équation

$$\sin^2 (\tfrac{1}{2} a) = \tfrac{1}{4} a^2 - \varepsilon k.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (53), nous trouverons

$$\sin a = a - \tfrac{1}{4} a^3 + a \varepsilon k + 2\delta \cos^2 (\tfrac{1}{2} a),$$

par conséquent,

$$a - \sin a = \tfrac{1}{4} a^3 - a \varepsilon k - 2\delta \cos^2 \tfrac{1}{2} a;$$

et, en faisant passer les deux derniers termes du second membre dans le premier,

$$a - \sin a + a \varepsilon k + 2\delta \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{4} a^3.$$

Si nous supprimons les deux derniers termes du premier membre, qui se composent de quantités positives, d'après ce qui précède, il restera

$$a - \sin a < \tfrac{1}{4} a^3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Appliquons cette formule à l'arc de 1′; pour cela remarquons que, d'après les premiers termes de la formule de Ludolphe, nous avons

$$\frac{\text{circ.}}{\text{diam.}} = 3,141\,592\,653\,589\,79\ldots.$$

Remplaçant le dénominateur du premier membre par 2, vu que le rayon étant l'unité, le diamètre vaut 2, nous aurons

$$\text{circ.} = 2\,(3,141\,592\,653\,589\,793\ldots) \quad \ldots \quad (55)$$

Or la circonférence contenant 360 degrés, et le degré 60 minutes, la circonférence est donc composée d'un nombre de minutes exprimé par $360 \times 60 = 21\,600$.

Au moyen de cette valeur, l'équation (55) nous donnera donc

$$1' \text{ ou } \frac{\text{circ.}}{21\,600} = 2\left(\frac{3,141\,592\,653\,589\,793\ldots}{21\,600}\right),$$

et, en exécutant la division,

$$1' \text{ ou } \frac{\text{circ.}}{21\,600} = 2\,(0,000\,145\,444\,104\,33);$$

donc

$$a \text{ ou } 1' = 0,000\,290\,888\,208\,66; \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

par conséquent, lorsqu'on aura élevé au cube le nombre décimal dépourvu des trois zéros qui le précèdent, on retranchera, suivant l'usage, à partir du dernier chiffre de la droite du cube trouvé et en allant vers la gauche, trois fois autant de décimales qu'il y avait de chiffres dans le nombre précédé de trois zéros, y compris ces zéros; et l'on complétera, à gauche, par autant de zéros qu'il sera nécessaire, le nombre re-

quis de décimales. Divisant ensuite par 4, on trouvera

$$\frac{a^3}{4} \text{ ou } \tfrac{1}{4}(1')^3 = 0,000\,000\,000\,006\,15,$$

nombre qui n'influe que sur la 12e décimale; et comme, d'après l'inégalité (54), la différence du sinus à l'arc est moindre que $\frac{a^3}{4} = \frac{1'^3}{4}$, on peut regarder la différence de l'arc au sinus de 1′ comme nulle, quand on ne prend pas plus de 11 décimales. Or, les valeurs des sinus des tables n'étant pas calculées ordinairement avec plus de décimales, on sent qu'on est en droit de regarder l'arc et le sinus comme étant égaux lorsqu'on se borne à ce nombre de décimales. (*Note sixième.*)

Quand on aura déterminé le sinus d'un arc de 1′, il sera facile d'obtenir les sinus et cosinus de l'arc de 2″; car, en prenant le rayon pour unité, l'équation $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ donnera $\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'}$.

Les valeurs de sin 1′ et de cos 1′, étant substituées dans les formules (28), feront connaître les valeurs de sin 2′ et de cos 2′; et les formules (28) détermineront ensuite les sinus et cosinus d'un arc de 3″.

49. Examinons maintenant comment on peut calculer plus commodément les autres sinus; si dans la formule (42) on fait $r = 1$, cette formule nous donnera

$$\sin(a+b) = 2\sin a \cos b - \sin(a-b),$$

et, en faisant $a = 1'$, $b = 1'$, et ensuite $a = 2'$, $a' = 3'$, etc., puis en continuant de laisser à b la valeur 1′, on aura successivement

$$\begin{aligned}
&\sin(1'+1') \text{ ou } \sin 2' = 2\cos 1' \sin 1' - 0,\\
&\sin(2'+1') \text{ ou } \sin 3' = 2\cos 1' \sin 2' - \sin 1',\\
&\sin(3'+1') \text{ ou } \sin 4' = 2\cos 1' \sin 3' - \sin 2',\\
&\sin(4'+1') \text{ ou } \sin 5' = 2\cos 1' \sin 4' - \sin 3',\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

et l'on voit qu'avec les valeurs du dernier et de l'avant-dernier sinus calculés, on obtient la valeur du sinus désiré.

On déterminera de même les cosinus à l'aide de la formule suivante,

tirée de l'équation (44) :

$$\cos(a+b) = 2\sin a \cos b - \cos(a-b).$$

C'est ainsi qu'en marchant progressivement, on pourrait construire des tables des sinus, si les séries convergentes données par le calcul différentiel ne fournissaient pas des moyens plus expéditifs pour y parvenir.

50. Tous ces sinus et cosinus ayant été calculés dans l'hypothèse du rayon 1, on obtiendra leurs valeurs dans l'hypothèse d'un rayon de 10 milliards de parties, en les multipliant par 10 milliards.

CHAPITRE VI.

Des logarithmes.

51. Les premiers mathématiciens qui employèrent les logarithmes ne virent, dans cette utile invention, qu'un procédé arithmétique qui convertissait la multiplication en addition, la division en soustraction, et l'extraction des racines en division. Il appartenait à Euler de présenter cette théorie sous un plus vaste point de vue, et ce fut en réfléchissant sur les propriétés remarquables des exposants, et en complétant la théorie des quantités algébriques, qu'il s'éleva à ces hautes considérations.

Les exposants ne furent d'abord destinés qu'à indiquer, dans les nombres entiers, combien de fois un produit renferme une quantité comme facteur. Ainsi, au lieu de *aaaaa* et de *aaa*, etc., on écrivit a^5, a^3, etc. ; et par la même raison que $aaaaa \times aaa = a^8$, on dut avoir $a^5 \times a^3 = a^{5+3}$, et en général $a^m \times a^n = a^{m+n}$. De là on établit cette règle, que pour multiplier une quantité affectée d'un exposant par la même quantité affectée d'un autre exposant, on doit donner pour exposant à cette quantité la somme de ces exposants.

52. On observa encore que, lorsque dans une quantité exponentielle a^m, la puissance m était divisible par 2, par 3,

par 4, les racines carrées, cubiques, quatrième de a^m, étaient représentées par $a^{\frac{m}{2}}$, par $a^{\frac{m}{3}}$, par $a^{\frac{m}{4}}$, etc.; car si, par exemple, $m = 6$, il est évident que $a^6 = aaaaaa$ doit avoir $aa = a^2$ pour racine cubique, et $aaa = a^3$ pour racine carrée.

On reconnut ensuite que ce principe pouvait même être appliqué à des exposants qui n'auraient pas de diviseurs. En effet, quelle est l'idée attachée à un radical, tel que $\sqrt[n]{a}$? c'est que, pour élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance n, il faut écrire a. Or, quand on écrit $a^{\frac{1}{n}}$, la même convention existe, puisque élever $a^{\frac{1}{n}}$ à la puissance n, c'est remplacer $a^{\frac{1}{n}}$ par a; d'où nous conclurons que $\sqrt{a}$ et $a^{\frac{1}{n}}$, étant les représentations d'une même opération sur a, doivent être traités comme des quantités égales : nous aurons donc, par exemple,

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{2}}, \quad \sqrt[7]{a^3} = a^{\frac{3}{7}}.$$

53. D'après ce qui précède, nous ne pouvons donc d'abord établir que ce principe sur les exposants fractionnaires :

Pour élever une quantité affectée d'un exposant fractionnaire à une puissance égale au dénominateur de cet exposant, supprimons ce dénominateur.

54. Partons donc de cette seule propriété pour démontrer que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

pour cet effet, soit

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \mathrm{B}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

nous tirerons de cette équation,

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{\mathrm{B}}{a^{\frac{p}{q}}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

faisant ensuite $a^{\frac{m}{n}} = C$, et $\frac{B}{a^{\frac{p}{q}}} = D$.

Si nous élevons la première de ces quantités à la puissance n, et la seconde à la puissance q, nous aurons

$$a^m = C^n, \quad \frac{B^q}{a^p} = D^q,$$

d'où nous tirerons

$$a^{mq} = C^{nq}, \quad \frac{B^{nq}}{a^{pn}} = D^{nq}; \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

or, en vertu de l'équation (58) et des deux qui la suivent,

$$C = D;$$

donc

$$C^{nq} = D^{nq},$$

ce qui montre que les premiers membres des équations (59) sont égaux, et qu'on a

$$a^{mq} = \frac{B^{nq}}{a^{pn}};$$

et, en chassant le dénominateur,

$$a^{mq} \times a^{pn} = B^{nq},$$

ou, à cause des exposants entiers,

$$a^{mq+pn} = B^{nq}:$$

tirant la racine nq des deux membres, on trouve

$$B = a^{\frac{mq+pn}{nq}};$$

mettant cette valeur de B dans l'équation (57), il vient

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

et si l'on fait attention que la somme de deux fractions composées de dénominateurs différents ne peut s'évaluer qu'après les avoir réduites au même dénominateur, on pourra rempla-

cer le second membre de l'équation (60) par $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, et cette équation deviendra

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}. \quad (*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

55. Il suit de ce qui précède, que soit que les exposants m et n représentent des nombres entiers ou fractionnaires, on a toujours

$$a^m \times a^n = a^{m+n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

La théorie des logarithmes repose entièrement sur cette propriété des exposants ainsi généralisée, comme nous allons le voir.

56. Le logarithme d'un nombre y est la puissance x à laquelle il faut élever un autre nombre a, toujours fixe, pour qu'on ait

$$y = a^x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Le nombre dont a tient la place est ce qu'on appelle la *base du système de logarithmes*. Cette base, une fois choisie, sert à calculer, dans ce système, les logarithmes de tous les nombres.

57. Adoptons, par exemple, 10 pour base; l'équation (63)

(*) Pour compléter cette théorie des exposants, nous ajouterons que l'équation générale $a^{m+n} = a^m \times a^n$ nous fait voir qu'en divisant le second membre par a^n, c'est diminuer l'exposant du premier membre de n unités.

D'où il suit que quand $m = 0$, c'est-à-dire quand nous avons $a^n = 1 \times a^n$, en divisant par a^n le second membre, et en diminuant l'exposant du premier de n unités, nous aurons

$$a^0 = 1.$$

Enfin, si dans cette dernière équation nous divisons encore les deux membres par a^n, en continuant d'opérer de la même manière, nous trouverons

$$a^{0-n} \quad \text{ou} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

deviendra $y = 10^x$;

et si nous faisons successivement

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4, \text{ etc.},$$

nous trouverons ces valeurs correspondantes par y,

$$y = 10^0 = 1,$$
$$y = 10^1 = 10,$$
$$y = 10^2 = 100,$$
$$y = 10^3 = 1000,$$
$$y = 10^4 = 10000.$$

Ainsi le logarithme de 1 est 0,
le logarithme de 10 est 1,
le logarithme de 100 est 2,
le logarithme de 1000 est 3,
le logarithme de 10000 est 4.

Nous n'avons donc, depuis 1 jusqu'à 10 mille, que cinq logarithmes; ceux qui appartiennent aux nombres intermédiaires manquent, parce qu'ils ne peuvent être compris que dans les nombres fractionnaires.

58. Par exemple, les logarithmes des nombres entiers compris entre 1 et 10 se trouveront entre 0 et 1; mais comme entre 0 et 1 on peut imaginer un nombre infini de fractions, il y aura une infinité de puissances fractionnaires qui tomberont entre 0 et 1, et parmi lesquelles seront les logarithmes de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 7, de 8 et de 9; il en sera de même des logarithmes qui tomberont entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4, etc.

59. On pourra donc chercher, entre tous ces logarithmes, ceux que nous représenterons par α, β, γ, etc., et qui seront tels que 10^α, 10^β, 10^γ, approcheront des nombres 2, 3, 4, etc., à un millionième, à un cent-millionième, à tel autre ordre

décimal près, etc., suivant le degré d'approximation auquel nous voudrons nous borner.

Pour donner une idée de la manière dont un logarithme peut être exprimé par une fraction décimale, proposons-nous, par exemple, de trouver le logarithme du nombre 3 : en désignant par x ce logarithme, il s'agit de satisfaire à l'équation $10^x = 3$. On voit d'abord qu'en faisant $x = 1$, l'exposant 1 est trop fort; car cette hypothèse amènerait $10^1 = 3$; essayons $\frac{1}{2}$, on a $10^{\frac{1}{2}} = 3$ ou $10 = 3^2$, et en élevant les deux nombres $10^{\frac{1}{2}}$ et 3 au carré, il vient $10 = 9$. L'exposant $x = \frac{1}{2}$ est donc encore trop fort. Prenons un exposant moindre, en substituant à x la fraction $\frac{1}{3}$, ce qui donne $10^{\frac{1}{3}} = 3$; et, en élevant au cube on obtient $10 = 3^3$ ou $10 = 27$: cette hypothèse est encore moins favorable que l'autre; car maintenant c'est le second membre qui l'emporte sur le premier, ce qui annonce que nous avons choisi une fraction trop faible. Il faut donc prendre une fraction comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, et l'on reconnaîtra facilement que $\frac{3}{7}$ (*Note septième*) satisfait à cette condition. L'hypothèse de $x = \frac{3}{7}$ nous amène $10^3 = 3^7$, et par conséquent $1000 = 2187$; ce qui montre que le second membre l'emporte encore sur le premier, et que la fraction $\frac{3}{7}$ est encore trop faible.

Sans aller plus loin, on voit qu'en diminuant ou en augmentant successivement la fraction qui est la valeur de x, de manière que les deux membres de l'équation tendent vers l'égalité, on s'approchera de plus en plus du logarithme de 3. Si l'on réduit ensuite cette fraction en décimales, et qu'on néglige les chiffres décimaux qui sont au delà du septième, on trouvera, comme dans les tables ordinaires,

$$\log 3 = 0,477\,1213;$$

et l'on voit que ce logarithme n'est autre chose que l'exposant de 10, dans cette équation approximative,

$$10^{0,477\,1213} = 3.$$

Il est à observer que le procédé que nous venons d'indiquer, uniquement pour faire concevoir la nature d'un logarithme, n'est bon qu'en théorie; car si l'on voulait en faire usage, il entraînerait dans des calculs trop laborieux et presque impraticables; tandis qu'il est des moyens beaucoup plus courts pour parvenir à ce but (*Note huitième*), surtout si l'on fait usage du calcul différentiel.

60. Nous avons vu (art. 55) qu'on avait, en général,

$$a^m \times a^n = a^{m+n};$$

il en doit être de même des logarithmes, qui ne sont autre chose que des exposants. Ainsi, lorsqu'à l'aide des tables, on trouve

$$\log 6 = 0,778\,1512,$$
$$\log 7 = 0,845\,0980;$$

on a donc

$$\log(6 \times 7) \text{ ou } \log 42 = 10^{0,778\,1512} \times 10^{0,845\,0980}; \quad (64)$$

et, d'après la règle des exposants (art. 55),

$$10^{0,778\,1511} \times 10^{0,845\,0980} = 10^{0,778\,1512 + 0,845\,0980},$$

en substituant cette valeur dans l'équation (64), on a

$$42 = 10^{0,778\,1512 + 0,845\,0980};$$

et en effectuant l'addition indiquée dans le second membre,

$$\log 42 = 1,623\,2492.$$

Ainsi, en cherchant dans la table 1,623 2492 le nombre auquel appartient ce logarithme, je trouverai 42, qui est le produit du nombre 6 par 7.

61. On conçoit que le même procédé appliqué à de grands nombres épargne la peine d'effectuer la multiplication, et

que, par la seule addition des logarithmes, on trouve dans les tables le logarithme de leur produit.

62. La règle que nous venons d'expliquer peut s'énoncer ainsi :

$$\log A + \log B = \log AB. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Nous allons tirer de cette équation toutes les propriétés des logarithmes.

Faisons passer log A dans le second membre, on aura

$$\log B = \log AB - \log A;$$

mais $B = \frac{AB}{A}$; remplaçons B par cette valeur, nous aurons

$$\log \frac{AB}{A} = \log AB - \log A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Concluons de là que pour diviser un nombre par un autre, on obtient le logarithme du quotient en retranchant le logarithme du diviseur de celui du dividende.

Par exemple, pour diviser 12 155 par 17, j'aurai

$$\log 12\,155 = 4{,}084\,7550,$$
$$\log 17 = 1{,}230\,4489;$$

la soustraction donne ce reste $2{,}854\,3061$,

qui sera le logarithme du quotient de 12 155 par 17, logarithme qu'on trouvera appartenir, dans les tables, au nombre 715, quotient cherché.

63. Si l'on veut avoir le logarithme d'un produit *abcd*, on regardera d'abord *abcd* comme composé des facteurs *abc* et *d*, et ensuite *abc* comme composé des facteurs *ab* et *c*, et enfin on décomposera le produit *ab* en ses facteurs *a* et *b*, et l'on aura

$$\log abcd = \log abc + \log d,$$
$$\log abc = \log ab + \log c;$$

et $$\log ab = \log a + \log b.$$

Remontant de valeur en valeur, on obtiendra

$$\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d \ldots.$$

Par exemple, si l'on a

$$a = 19, \quad b = 13, \quad c = 11, \quad d = 2,$$

ou

$$\begin{aligned} \log 19 &= 1,2787536, \\ \log 13 &= 1,1139433, \\ \log 11 &= 1,0413927, \\ \log\ 2 &= 0,3010300, \\ \text{somme}\ldots\ &\ \ \overline{3,7351196}, \end{aligned}$$

ce logarithme, cherché dans les tables, répond à 5434, produit des nombres 19, 13, 11 et 2.

64. Si les facteurs a, b, c, d, etc., sont égaux, les produits ab, abc, $abcd$, etc., se changent en a^2, en a^3, en a^4, etc., et l'on a

$$\begin{aligned} \log a^2 &= \log a + \log a = 2\log a, \\ \log a^3 &= \log a + \log a + \log a = 3\log a, \\ \log a^4 &= \log a + \log a + \log a + \log a = 4\log a, \\ \text{etc.,} \quad & \quad \text{etc.,} \quad\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

En général on a

$$\log a^m = m \log a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Par exemple, pour élever 23 à la puissance 3, on multipliera par 3 le nombre 1,3617278, qui est le logarithme de 23, et l'on trouvera 4,0851834 (*), qui, cherché dans les tables, correspond à 12167, valeur du cube de 23.

(*) Les dernières décimales des tables ne sont pas toujours très-exactes, à cause des décimales d'ordres inférieurs que l'on néglige ou que l'on remplace par l'unité du dernier ordre des tables, lorsque les décimales négligées ont une valeur qui s'approche de cette unité.

65. La formule (67) va nous conduire aux extractions de racines. En effet, soit proposé de trouver la racine carrée d'un nombre, en supposant $m = 2$, l'équation (67) nous donne

$$\log a^2 = 2 \log a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Faisons $a^2 = b$, et par conséquent $a = b^{\frac{1}{2}}$; en substituant ces valeurs dans l'équation (68), on aura

$$\log b = 2 \log b^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire

$$\log b^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \log b;$$

mais

$$b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b};$$

donc

$$\log \sqrt{b} = \tfrac{1}{2} \log b.$$

66. En général, si l'on fait $a^m = b$, et par conséquent $a = b^{\frac{1}{m}}$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (67), on aura

$$\log b = m \log b^{\frac{1}{m}};$$

d'où l'on tire

$$\log b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log b, \quad \text{ou} \quad \log \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log b.$$

Plus généralement encore, faisons

$$a = b^{\frac{n}{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

ce qui donnera

$$a^m = b^n;$$

prenons les logarithmes, nous aurons

$$\log a^m = \log b^n,$$

ou, conformément à l'équation (67),

$$m \log a = n \log b,$$

et par conséquent

$$\log a = \frac{n}{m} \log b;$$

remplaçant a par la valeur que donne l'équation (69), nous obtiendrons enfin

$$\log b^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \log b,$$

ou

$$\log \sqrt[m]{b^n} = \frac{n}{m} \log b.$$

Lorsque $n = 1$, cette formule se réduit à

$$\log \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log b,$$

et aurait pu se déduire immédiatement de l'équation (67).

67. Pour en donner un exemple, cherchons la racine cubique de 2197. Dans ce cas l'on a $m = 3$ et $b = 2197$. Le logarithme de ce nombre étant 3,341 830 1, j'en prends le tiers, ce qui me donne 1,113 943 3, logarithme qui dans les tables répondant à 13, m'annonce que 13 est la racine cubique de 2197.

68. Déterminons encore le nombre auquel appartient $\sqrt[23]{10^{11}}$, ou $10^{\frac{11}{23}}$. Multipliant le logarithme de 10, qui est 1, par la fraction $\frac{11}{23}$, cela se réduit à diviser 11 par 23, ce qui me donne 0,478 260 8 pour le logarithme du nombre cherché.

69. Si l'on désigne par x le quatrième terme de la proportion

$$a : b :: c : x,$$

on a pour ce quatrième terme

$$x = \frac{bc}{a};$$

par conséquent, conformément à l'équation (66),

$$\log x = \log bc - \log a,$$

ou, comme l'indique l'équation (65),

$$\log x = \log b + \log c - \log a;$$

ce qui nous apprend que, dans une règle de trois, le logarithme du quatrième terme est égal à la somme des logarithmes de deux termes du milieu, diminuée du logarithme du premier terme.

70. Remarquons que ceux qui ont calculé les tables n'ont eu besoin de calculer que les logarithmes des nombres premiers, c'est-à-dire des nombres qui ne peuvent se décomposer en facteurs; car le logarithme de tout nombre qui peut se décomposer en facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs. Par exemple, les logarithmes de 2 et de 5 étant connus seulement, on aura

$$\begin{aligned}
\log 4 &= \log 2^2 = 2\log 2,\\
\log 10 &= \log 2 + \log 5,\\
\log 8 &= \log 2^3 = 3\log 2,\\
\log 16 &= \log 2^4 = 4\log 2,\\
\log 20 &= \log 2^2 \log 5 = 4\log 5,\\
\log 25 &= \log 5^2 = 2\log 5.
\end{aligned}$$

71. L'entier qui est à la gauche d'un logarithme s'appelle la *caractéristique* de ce logarithme. C'est cette caractéristique qui détermine à quel ordre de numération appartient le nombre qui correspond à un logarithme. Par exemple, un nombre compris entre 1 et 10 a 0 pour caractéristique; un nombre compris entre 10 et 100 a 2 pour caractéristique; un nombre compris entre 100 et 1000 a 3 pour caractéristique; un nombre compris entre 1000 et 10000 a 4 pour caractéristique; et ainsi de suite : de sorte qu'un nombre composé de deux chiffres correspond à la caractéristique 1; qu'un nombre composé

de trois chiffres correspond à la caractéristique 2; et qu'en général, un nombre contient autant de chiffres qu'il y a d'unités moins une à la caractéristique.

72. Les logarithmes des produits d'un nombre par les puissances de 10 ne diffèrent que par la caractéristique; car

$$\begin{aligned}
\log 10\,a &= \log 10 + \log a = 1 + \log a,\\
\log 100\,a &= \log 100 + \log a = 2 + \log a,\\
\log 1000\,a &= \log 1000 + \log a + 3 + \log a,\\
&\text{etc.,} \qquad \text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

73. Ceci va nous conduire à trouver un quotient par approximation. Par exemple, pour déterminer à un centième près le quotient de la division

de $\qquad 12\,582$ par 935,

j'ai

$$\begin{aligned}
\log 12\,582 &= 4{,}0997497,\\
\log 935 &= \underline{2{,}9708116},\\
&\ 1{,}1289381.
\end{aligned}$$

Au lieu de chercher dans les tables ce logarithme tel qu'il est, j'ajoute 3 unités à la caractéristique, et je trouve que le logarithme de 4,1289381 répond à 13456. Or ce nombre est mille fois trop grand, parce que le logarithme auquel il appartient a 3 unités de trop à la caractéristique; je le réduis donc à sa juste valeur en écrivant 13,456.

74. En général, on retranche autant de chiffres sur la droite qu'on a ajouté d'unités de trop à la caractéristique; ce qui donne l'approximation à $\frac{1}{10}$, à $\frac{1}{100}$, à $\frac{1}{1000}$ près, etc., selon l'exactitude que l'on veut mettre à l'opération.

75. Pour second exemple, prenons la racine cubique de 3 à un dix-millième près. J'ajoute 4 unités au tiers du logarithme de 3, et j'ai 4,1590407, nombre qui répond dans les tables à 14422; retranchant donc 4 chiffres à droite, j'obtiens 1,4422 pour racine cubique, à un dix-millième près.

76. Pour avoir le logarithme d'une fraction moindre que l'unité, on doit avoir le *logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur,* par la même raison que le logarithme de $\frac{a}{b}$ est $\log a - \log b$; ce qui revient à prendre négativement le logarithme de $\frac{\textit{dénominateur}}{\textit{numérateur}}$.

Par exemple, le logarithme de $\frac{3}{4}$ serait $-\log\frac{4}{3}$;

or
$$\log 3 = 0{,}4771213,$$
$$\log 4 = 0{,}6020600;$$

prenant la différence de ces logarithmes, et retranchant le plus faible du plus fort, en donnant le signe négatif, on a donc

$$\log\tfrac{3}{4} = -0{,}1249393.$$

Pour savoir ce que signifie cette expression,

$$-\log\frac{\textit{dénominateur}}{\textit{numérateur}},$$

qu'on trouve pour logarithme d'une fraction, il faut remarquer que si, au lieu de la fraction $\frac{\textit{numérateur}}{\textit{dénominateur}}$, nous avions $\frac{\textit{numérateur}}{\textit{dénominateur}} \times 10$, le logarithme de ce nombre serait

$$1 + \log \textit{numérateur} - \log \textit{dénominateur},$$

ou plutôt $1 - (\log \textit{dénominateur} - \log \textit{numérateur})$;

ce qui revient à

$$1 - \log\frac{\textit{dénominateur}}{\textit{numérateur}};$$

d'où il suit qu'il faudrait retrancher le logarithme négatif trouvé ci-dessus de l'unité, pour avoir un nombre dix fois plus grand que celui auquel ce nombre appartient, nombre que l'on réduirait à sa juste valeur en retranchant un chiffre sur la droite.

77. Mais si au lieu de retrancher mon logarithme négatif d'une unité, on le retranchait de plusieurs, il faudrait (art. **73**) retrancher autant de chiffres sur la droite du nombre qui correspond à un logarithme négatif. Par exemple, si l'on ignorait à quel nombre appartient le logarithme négatif — 0,124 9393 que nous venons de déterminer (art. **76**), retranchant ce logarithme de 2 unités, on trouverait 1,875 0607, logarithme qui, répondant à 75, m'annonce que la fraction cherchée est 0,75 (*).

78. Pour trouver à quel nombre appartient un logarithme qui ne se trouve point dans les tables, par exemple, 6,324 8150, je cherche ce logarithme avec une caractéristique moindre de 3 unités, et je trouve dans les tables que les nombres 2112 et 2113 répondent à ces logarithmes :

$$3,3246939,$$
$$3,3248995,$$

entre lesquels tombe mon logarithme; ce qui m'annonce que ce logarithme est un peu plus grand que celui de 2112, sans atteindre à celui de 2113. Il ne peut donc appartenir qu'à 2112, plus une fraction z moindre que l'unité.

Pour déterminer z, je vois dans les tables que les logarithmes entre lesquels tombe mon logarithme diffèrent entre

---

(*) Voici de quelle manière je pense qu'on pourrait démontrer plus rigoureusement et plus dans l'esprit de la théorie, que le logarithme d'une fraction est un nombre négatif.

Soit m le logarithme de $\frac{4}{3}$, on a donc

$$a^m = \frac{4}{3};$$

on tire de là

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{a^m};$$

mais $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ (*Note* de l'art. **54**). Substituant cette valeur, on a

$$\frac{3}{4} = a^{-m};$$

donc le logarithme de $\frac{3}{4}$ est égal au logarithme de $\frac{4}{3}$ pris négativement.

eux de 2056. Retranchant ensuite le plus faible logarithme de mon logarithme, je trouve 1211 pour différence, et j'établis cette proportion : 2056 est à une différence d'une unité entre les nombres 2112 et 2113, comme 1211 est à la différence z qui existe entre le nombre qui correspond à mon logarithme, et 112; c'est-à-dire

$$2056 : 1 :: 1211 : z;$$

d'où je tire

$$z = \frac{1211}{2056} = 0,589.$$

Par conséquent, le nombre correspondant au logarithme 3,3248150 est 2112,589. Rendant ce nombre dix mille fois plus grand en supprimant la virgule, je dois (art. 73) ajouter 3 unités à la caractéristique de son logarithme; d'où je conclus que le logarithme donné 6,3248150 appartient au nombre 21125 89.

79. Le même procédé peut s'appliquer aux logarithmes qui, sans une caractéristique plus grande que celles des tables, ne s'y trouvent pas compris exactement. Par exemple, si l'on demandait à quel nombre correspond 3,5270334, ce logarithme tombant entre ceux de 3365 et 3366, j'en retrancherais celui de 3365, ce qui me donnerait une différence de 483; et, comme l'exige la proportion, divisant cette différence par celle qui existe entre les logarithmes de 3365 et de 3366, qui se trouve être de 1290, j'ajoute donc au nombre 3365 la fraction $\frac{483}{1290}$, ou plutôt 0,3744; d'où il suit que le nombre qui correspond au logarithme donné 3,5270334 est 33653744.

80. Résolvons maintenant la question inverse, en cherchant quel est le logarithme d'un nombre plus grand que ceux des tables, par exemple, celui de 15707981 : je retranche sur la droite autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que les chiffres restant sur la gauche puissent se trouver dans les tables. Ici je sépare 3 chiffres avec une virgule, ce qui rend ce nombre mille fois plus petit. Je trouve d'abord 4,195093 2

pour le logarithme de 15707; à l'égard de la fraction décimale 0,981, je détermine le nombre auquel elle appartient par cette proportion : si une unité de différence entre les nombres 15707 et 15708 répond à une différence de 277 pour leurs logarithmes, à quel nombre répondra 0,981, c'est-à-dire que je pose la proportion

$$1 : 277 :: 0,981 : x;$$

d'où je tire $x = 0,981 \times 277 = 271,737$; ces 271 unités étant réunies aux deux dernières décimales du logarithme 4,195 093 2, j'aurai 7,195 120 3 pour le logarithme du nombre donné 15 707 981. J'ai ajoute 3 unités à la caractéristique, parce que ce nombre est mille fois plus grand.

81. La raison de cette règle et de la précédente est fondée sur ce que les logarithmes des nombres plus grands que 900 croissent à peu près uniformément. C'est ce que l'on voit par leur différence, qui ne varie pas beaucoup; il suit de là que la $m^{ième}$ partie d'une différence d'une unité dans deux nombres consécutifs doit correspondre à la $m^{ième}$ partie de la différence qui existe entre leurs logarithmes; autrement les différences de logarithmes marquées dans les colonnes ne se maintiendraient pas toujours à peu près les mêmes.

82. Ayant le logarithme x d'un nombre y dont la base est A, proposons-nous de trouver le logarithme z du même nombre y dans le système dont la base est B, nous avons

$$A^x = y,$$

$$B^z = y;$$

donc

$$B^z = A^x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Si l désigne le logarithme dans le système dont la base est A, et L le logarithme dans le système dont la base est B, nous

aurons

$$\mathrm{l}\,A^z = \mathrm{l}\,B^z;$$

mais

$$\mathrm{l}\,A^z = x;$$

donc, en vertu de l'équation (70),

$$x = \mathrm{l}\,B^z;$$

et par conséquent, d'après la propriété des logarithmes (équat. 67, art. **64**),

$$x = z\,\mathrm{l}\,B;$$

d'où je tire

$$\frac{x}{\mathrm{l}\,B} = z = \mathrm{L}y.$$

On tire de là cette conclusion, que lorsqu'on a le logarithme d'un nombre dans un système, il faut le diviser par le logarithme de la base du logarithme du second système, pour avoir le logarithme du même nombre dans ce second système. Par exemple, pour avoir le logarithme de 177, dans le système dont la base est 8, je divise le logarithme 177 des tables, qui est 2,247 973 3 par 0,903 090 0, logarithme de 8 dans ces mêmes tables, et j'ai $\frac{2247973\,3}{9030900}$ pour le logarithme cherché.

83. Appliquons maintenant la théorie des logarithmes aux tables des sinus. Ces tables ne renferment ordinairement que les logarithmes des sinus, des cosinus, des tangentes et des cotangentes construites en supposant un rayon de dix milliards de parties, mais ne contiennent pas les valeurs de ces sinus, de ces tangentes, etc., parce qu'on ne rencontre que rarement l'occasion de les employer, et que d'ailleurs on peut les obtenir au moyen des tables de leurs logarithmes. Examinons d'abord comment un sinus étant donné, on peut avoir son logarithme. On sait, par exemple, que le sinus de 30 degrés est égal à la moitié du rayon (art. **40**); on a donc

$$\sin 30^\circ = 0{,}5 = \tfrac{5}{10}.$$

Cette valeur étant multipliée par dix milliards, donne

$$\mathrm{L}\tfrac{5}{10} \times 10{,}000\,000\,000 = 10 + \log 5 - \log 10 = 10 + \log 5 - 1 = 9 + \log 5.$$

Or, le logarithme de 5 étant 0,698 9700, j'ai donc

$$\log \text{ de } \sin 30^\circ = 9{,}698\,9700.$$

84. Résolvons maintenant la question inverse, et déterminons la valeur d'un sinus donné, par exemple celle du sinus de 42 degrés, dont le logarithme dans les tables des sinus est 9,8255109.

Si le rayon est l'unité, qui est un milliard de fois moindre que le rayon des tables, le sinus qui appartient au rayon 1 doit être aussi un milliard de fois moindre que le sinus des tables. Or le logarithme du sinus des tables étant 9,8255109, le logarithme qui appartient au sinus demandé devra avoir 10 unités de moins à sa caractéristique. J'en supprime 9 en réduisant mon logarithme à 0,8255109, et je le cherche avec 3 unités à la caractéristique. Ce sera donc 4 unités de trop à la caractéristique : ce qui fait que je dois retrancher quatre chiffres au nombre 6691, auquel répond le logarithme de 3,8255109, et par conséquent réduire ce nombre à 0,6691, sinus d'un angle de 42 degrés pour le rayon 1.

Si l'on veut une approximation plus grande, il faut remarquer que 0,8255109 tombant entre les logarithmes de 6691 et 6692, qui sont 3,8254910 et 3,8255559, ce n'est pas exactement le nombre 6691 qui correspond à mon logarithme, mais 6691, plus une fraction moindre que l'unité, qu'il faut déterminer à l'aide de la règle de l'art. **78** : en opérant ainsi, je trouve que cette fraction est 0,306; de sorte qu'au lieu du nombre 6691, j'ai 6691,306. Reculant donc, comme précédemment, la virgule de quatre rangs sur la gauche, j'ai, avec plus d'exactitude, 0,6691306 pour le sinus de 42 degrés qui appartient au rayon 1.

CHAPITRE VII.

De la résolution des triangles rectangles.

85. Dans tout ce qui va suivre nous désignerons, suivant un usage reçu, les angles d'un triangle par les majuscules A, B, C, et les côtés opposés à ces angles par les lettres a, b, c. Fig. 24. Cela posé, un triangle rectangle BAC (*fig.* 124) étant donné, imaginons qu'on prenne le rayon DB des tables pour hypoténuse d'un triangle rectangle DBE dans lequel l'angle B soit commun; les triangles semblables BCA, BDE donneront les proportions

$$BC : CA :: DB : DE, \qquad BC : BA :: DB : BE;$$

ou $$a : b :: r : \sin B, \quad a : c :: r : \cos B; \quad . \quad (71)$$

d'où l'on tirera

$$b = \frac{a \sin B}{r}, \quad c = \frac{a \cos B}{r},$$

ces équations lorsque $r = 1$, se réduisent à

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B;$$

ce qui donne ces résultats remarquables.

Dans un triangle rectangle, le *côté opposé à l'un des angles aigus est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de cet angle*, et le *côté adjacent à cet angle aigu est égal à l'hypoténuse multipliée par son cosinus.*

86. Les angles B et C valant ensemble un angle droit, l'un de ces angles est complément de l'autre; de sorte que nous avons

$$\sin B = \cos C, \quad \text{et} \quad \sin C = \cos B.$$

87. On peut aussi établir une proportion dans laquelle entre la tangente des tables. Dans ce cas il ne faut pas prendre l'hypoténuse pour rayon, mais l'un des côtés de l'angle droit, par exemple BG, car alors GF sera la tangente des tables, comme on le voit *fig.* 24; et l'on aura Fig. 24.

$$BA : CA :: BG : GF, \quad CA : BA :: GF : BG,$$

ou $$c : b :: r : \text{tang}\, B, \quad b : c :: r : \text{tang}\, C. \quad . \quad . \quad (72)$$

Cette dernière proportion peut se déduire de l'autre; car, en vertu de l'équation (4) (*page* 7), il vient

$$\text{tang}\, C = \frac{r^2}{\cot C};$$

substituant cette valeur dans la seconde des proportions (72), on a

$$b : c :: r : \frac{r^2}{\cot C};$$

multipliant le second rapport par cot C et divisant par r, on obtient

$$b : c :: \cot C : r;$$

et en observant que la cotangente de l'angle C est la tangente de

l'angle B, cette proportion devient

$$c : b :: r : \text{tang B};$$

ce qui nous fait retomber sur la première des proportions (72).

88. Lorsque dans un triangle rectangle on donne deux des choses qui rentrent dans l'un de ces cas : 1° un des angles aigus et l'hypoténuse; 2° un des angles aigus et un côté; 3° l'hypoténuse et un côté; 4° les deux côtés, il est facile de déterminer les trois autres choses. C'est ce qui va donner lieu aux problèmes suivants, qui sont de deux sortes : ceux où entre l'hypoténuse dans les données, et qui se résolvent par les sinus, et ceux où l'hypoténuse n'entre pas dans les données, et qui se résolvent par les tangentes.

Fig. 24. 89. 1er *cas*. — Connaissant (*fig.* 24) l'hypoténuse BC du triangle ABC et l'angle aigu B, trouver l'angle C et les côtés b et c.

Les trois angles d'un triangle valant 180 degrés, si l'on en retranche l'angle droit A, il restera 90 degrés pour la somme des angles aigus; par conséquent, l'angle C est déterminé par cette équation :

$$C = 90 - B;$$

à l'égard des côtés, en comparant le triangle CAB au triangle semblable DEB construit avec le rayon r des tables, pris pour hypoténuse, nous avons

$$r : \sin B :: a : b, \qquad r : \cos B :: a : c;$$

d'où nous tirerons

$$b = a\,\frac{\sin B}{r}, \qquad c = a\,\frac{\cos B}{r}.$$

Opérant par logarithmes, et observant que le logarithme du rayon des tables est la caractéristique 10,

$$\log b = \log a + \log \sin B - 10,$$

$$\log c = \log a + \log \cos B - 10.$$

90. 2e *cas*. — Le côté CA $= b$ et l'angle B, auquel ce côté est opposé, étant donnés, trouver, 1° l'angle C; 2° le côté AB $= c$ adjacent à l'angle B; 3° l'hypoténuse BC $= a$. Fig. 24.

On a déjà vu qu'on avait C $= 90 -$ B; à l'égard de AB $= c$ et de l'hypoténuse CB $= a$, nous avons

$$\sin B : \cos B :: b : c, \quad \sin B : r :: b : a; \quad . \; . \; (73)$$

on tire de la première proportion $c = b \frac{\cos B}{\sin B}$, équation qui, à l'aide de la formule 2 (*page* 6), se réduit à $\frac{br}{\tang B}$. Par conséquent, les proportions (73) nous donnent ces équations :

$$c = \frac{br}{\tang B}, \quad a = \frac{br}{\sin B}.$$

Opérant par logarithmes, on trouve

$$\log c = \log b + 10 - \log \tang B, \quad \log a = \log b + 10 - \log \sin B.$$

91. 3e *cas*. — L'hypoténuse a et le côté AC $= b$ étant donnés, trouver le côté AB $= c$ et les deux angles B et C:

$$a : b :: r : \sin B;$$

donc

$$\sin B = \frac{br}{a}.$$

Opérant par logarithmes,

$$\log \sin B = \log b + 10 - \log a.$$

Cette équation fera connaître l'angle B, et en prenant le complément, on déterminera C, et ensuite l'on trouvera le côté c par cette proportion,

$$r : \sin C :: a : c;$$

d'où l'on tirera

$$c = a \frac{\sin C}{r}.$$

Et, en opérant par logarithmes,

$$\log c = \log a + \log \sin C - 10.$$

92. 4e *cas.* — Connaissant les côtés b et c, trouver l'hypoténuse a et les angles : on a

$$c : b :: r : \text{tang}\, B;$$

et par conséquent,

$$\text{tang}\, B = \frac{br}{c};$$

et, en opérant par logarithmes,

$$\log \text{tang}\, B = \log b + 10 - \log c;$$

ayant ainsi déterminé l'angle B, on aura

$$C = 90 - B.$$

A l'égard de l'hypoténuse, la proportion

$$\sin B : r :: b : a$$

nous donne pour sa valeur

$$a = \frac{rb}{\sin B};$$

et, en opérant par logarithmes,

$$\log a = \log b + 10 - \log \sin B.$$

93. Avant de passer à des applications, nous allons faire connaître un instrument qui sert à mesurer les angles sur le terrain; c'est le graphomètre (*fig.* 25), composé d'un demi-cercle de cuivre, dont le bord, qu'on appelle *limbe*, est divisé en 180 degrés (*); la ligne de foi, règle fixe, répond aux degrés 0 et 180 par ses extrémités, où sont placées deux pinnules, plaques de cuivre qui, par des incisions perpendiculaires

Fig. 25

(*) Un vernier fait connaître les minutes.

au limbe, laissent passer un rayon visuel. L'alidade, autre règle, est mobile autour du centre O, et se termine également par deux pinnules, à travers lesquelles passe un second rayon visuel qui, avec la ligne de foi, forme l'angle qu'on veut mesurer. L'instrument peut prendre toutes les positions, et l'on y adapte quelquefois une boussole et des lunettes

94. Cela posé, proposons-nous d'abord de *déterminer la hauteur* AB *d'une tour dont le pied soit abordable* (fig. 26). Fig. 26.

On placera le graphomètre à une distance de la tour convenable, pour que l'angle AOC ne soit ni trop aigu ni trop obtus, et l'on mesurera la distance horizontale OC de l'instrument à la tour; ou, ce qui revient au même, on déterminera, à l'aide d'une chaîne, ou d'une corde, la distance GB du pied de l'instrument à la tour, et ayant placé le graphomètre dans une position verticale, ce qui se fera à l'aide d'un fil à plomb suspendu au centre O; le diamètre fixe DE étant dans une position horizontale, on fera mouvoir l'alidade FI, jusqu'à ce qu'à travers les pinnules on aperçoive l'extrémité A de la tour : on verra alors, sur l'instrument, le nombre de degrés et de minutes que comprend l'arc DF, qui sera la mesure de l'angle opposé au sommet AOC. Alors, dans le triangle AOC, on aura ces trois choses connues, savoir : l'angle droit, l'angle AOC et le côté OC = GB. Il nous sera facile de déterminer la droite AC, à laquelle ajoutant CB, hauteur de l'instrument, on aura AB pour celle de la tour.

95. Appliquons le calcul à la solution de ce problème, et supposons qu'on ait trouvé GB de 62 mètres, et l'angle AOC de 37 degrés, nous aurons donc la proportion

$$r : \text{tang } 37^\circ :: 62^m : AC;$$

et, en opérant par logarithmes,

$$\log \text{tang } 37^\circ + \log 62^m - 10 = \log AC;$$

et l'on trouvera

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} 37^\circ &= 9,8771144 \\ \log 62^m &= 1,7923917 \\ \hline & 11,6695061 ; \end{aligned}$$

retranchant le logarithme du rayon des tables dont la caractéristique est 10, il restera pour logarithme de AC

$$1,6695061 ;$$

ce logarithme étant cherché avec 2 unités de plus à la caractéristique, il faut retrancher deux chiffres sur la droite du nombre auquel ce logarithme correspond, et nous trouverons

$$AC = 46^m,72 ,$$

et nous ajouterons à cette hauteur verticale celle du pied de l'instrument.

96. Pour seconde application, résolvons ce problème :

Un navire s'est approché de l'orient de 24 lieues et du nord de 9; on demande quel chemin il a parcouru.

Fig. 27. Il s'agit de trouver l'hypoténuse du triangle rectangle ABC (*fig.* 27), ce qu'il serait facile d'obtenir par la propriété du carré de l'hypoténuse; mais en employant la trigonométrie, nous déterminerons d'abord l'angle B au moyen de la proportion

$$AB : AC :: r : \operatorname{tang} B;$$

et en opérant par logarithmes, nous trouverons

$$\begin{aligned} \log r &= 10 \\ \log AC \text{ ou } \log 9 &= 0,9542425 \\ \hline & 10,9542425 \\ \log \text{ de } AB \text{ ou de } 24 &= 1,3802112 \\ \hline & 9,5740313 \end{aligned}$$

Cherchant ce nombre dans les tables des tangentes, j'en conclus que

$$\text{tang B} = 20^\circ\, 33'.$$

Maintenant je puis déterminer le chemin parcouru BC par la proportion

$$\sin \text{B} : r :: \text{AC} : \text{BC},$$

ou

$$\sin 20^\circ\, 33' : r :: 9 : \text{BC};$$

opérant par logarithmes, nous avons donc

$$\begin{array}{rcr} \log r & = & 10 \\ \log 9 & = & 0{,}9542425 \\ \hline & & 10{,}9542425 \\ \log \text{de} \sin 20^\circ\, 33' & = & 9{,}5453376 \\ \hline & & 1{,}4089049 \end{array}$$

Ce dernier nombre cherché, avec 2 unités de plus à la caractéristique, nous donne, en retranchant 2 chiffres sur la droite,

$$\text{BC} = 25^{\text{l}},63.$$

97. Quoique les opérations précédentes soient d'une grande simplicité, nous aurions pu les rendre encore plus faciles à l'aide des compléments arithmétiques. Pour concevoir sur quel principe repose ce genre de calculs, imaginons qu'on eût à ôter b de a, et qu'au lieu de cette soustraction on retranchât b d'un autre nombre m, le résultat de cette seconde opération serait évidemment $m - b$; ajoutant cette différence à a, nous aurions $a + m - b$, nombre qui surpasse de m celui que devrait amener la soustraction. C'est sur cette considération qu'est fondée la théorie des compléments arithmétiques.

Le complément arithmétique d'un nombre est ce qui lui manque pour aller à la puissance de 10 immédiatement au-

dessus; ainsi, pour avoir le complément arithmétique de 8687, je soustrais ce nombre de 10 000; et, comme on le sait, l'opération se réduit à retrancher la dernière décimale 7 de 10 et chacun des autres chiffres de 9, ce qui est beaucoup plus facile à exécuter qu'une soustraction ordinaire, compliquée souvent par des retenues. Si l'on avait, par exemple, à soustraire 19648 de 36403, on prendrait le complément arithmétique de 19648, en retranchant ce nombre de 100 000, et l'on trouverait 80 352, qui, ajouté à 36403, donnerait 116755, nombre trop fort de 100 000, et qu'on réduirait à sa juste valeur en écrivant 16755, comme on l'eût trouvé immédiatement en retranchant 19648 de 36403.

Dans les calculs exécutés à l'aide des logarithmes, on fait un fréquent usage des compléments arithmétiques.

98. Voici, par exemple, de quelle manière on aurait pu calculer, à l'aide des compléments arithmétiques, les opérations de l'art. **96**:

log 9	=	0,9542425
compl. du log de 24	=	8,6197888
log r	=	10,
		19,5740313

Retranchant le premier chiffre sur la gauche à cause du complément, il reste 9,5740313, comme dans l'art. **96**.

De même, la seconde opération de l'art. **96** eût été convertie en celle-ci:

log r	=	10,
log 9	=	0,9542425
compl. du log de sin 20° 33′	=	0,4546624
		11,4089049

Retranchant le premier chiffre sur la droite, il reste 1,4089049, comme dans l'art. **96**.

99. Il est à observer que si, dans une opération, on avait plusieurs compléments arithmétiques, il faudrait retrancher du premier chiffre sur la gauche autant d'unités qu'on aurait de compléments.

CHAPITRE VIII.

De la résolution des triangles obliquangles.

100. Dans tout triangle *les côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés.*

En effet, dans l'un des triangles ABC (*fig.* 28 et 29), si du sommet C d'un angle nous abaissons une perpendiculaire CD sur le côté AB (*fig.* 28) ou sur le prolongement de ce côté (*fig.* 29), nous aurons (art. 85), dans l'un et dans l'autre cas, Fig. 28 et 29.

$$CD = \frac{b \sin A}{r}, \quad CD = \frac{a \sin B}{r};$$

comparant ces valeurs, nous obtiendrons

$$b \sin A = a \sin B,$$

ce qui nous donne la proportion

$$\sin A : a :: \sin B : b. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Ce que nous disons des angles A et B pouvant s'appliquer aux angles A et C, nous aurons encore

$$\sin A : a :: \sin C : c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

on tire de ces deux proportions

$$\sin B : b :: \sin C : c. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

101. Cette proposition, qui est fondamentale, se démontre plus directement de cette manière par la Géométrie :

Fig. 30. Soit un triangle ABC (*fig.* 30); l'ayant inscrit dans un cercle, on décrira du centre O avec le rayon des tables un autre cercle *abc*. Les rayons O*a*, O*b*, O*c* de ce cercle étant entre eux dans le rapport de 1 à 1, seront proportionnels aux rayons OA, OB, OC, qui sont dans le même rapport; ce qui établira la similitude des triangles ABC et *abc* : on aura donc

$$BC : AC : AB :: bc : ac : ab :: \tfrac{1}{2}bc : \tfrac{1}{2}ac : \tfrac{1}{2}ab;$$

mais $\frac{1}{2}bc$, $\frac{1}{2}ac$, $\frac{1}{2}ab$ sont les sinus des demi-arcs *bl*, *ah*, *ak*, demi-arcs de même nombre de degrés que BL, AH et AK (art. 7); or ces arcs BL, AH et AK, comme moitiés des arcs BC, AC et AB, sont les mesures des angles BAC, ABC, ACB, qui ont leurs sommets appuyés sur la circonférence; donc

$$BC : AC : AB :: \sin A : \sin B : \sin C.$$

102. Il est à observer que le sinus d'un angle obtus étant le même que celui de son supplément (art. 25), il est nécessaire que l'on sache si l'angle opposé au côté AC est obtus ou aigu; car, dans le premier cas, cet angle sera ABC (*fig.* 31), et dans le second, il sera AB'C. Remarquons, d'ailleurs, que les trois angles d'un triangle valant ensemble deux angles droits, le sinus appartiendra à l'angle obtus B, lorsque les angles A et C réunis vaudront moins d'un angle droit; tandis que le sinus appartiendra à l'angle aigu B' lorsque la somme des angles A et C surpassera un angle droit.

Fig. 31.

103. Une chose peut encore nous arrêter, c'est qu'un triangle n'est pas toujours possible; car, quel que soit l'angle formé par deux côtés donnés, il faut que le troisième côté soit moindre que les deux autres réunis, en vertu du principe, que la ligne brisée surpasse la ligne droite.

104. Au moyen du théorème de l'art. **100**, on résoudra facilement le problème renfermé dans le cas suivant :

1er *cas*. — Étant donnés le côté *c* d'un triangle ABC (*fig.* 28 et 29) et les deux angles adjacents A et B, trouver les trois autres

choses de ce triangle. D'abord on aura

$$C = 180 - (A + B),$$

et l'on déterminera ensuite a et b par les proportions

$$\sin C : c :: \sin A : a,$$
$$\sin C : c :: \sin B : b.$$

105. 2e *cas.* — Étant donnés le côté a, l'angle A qui lui est opposé et le côté b, trouver les autres choses du triangle; ces conditions ne suffisent pas, car le côté a pouvant avoir une de ces positions CB ou CB′ (*fig.* 31), il faut, comme nous l'avons dit (art. **102**), que l'on sache de plus si l'angle B est obtus ou aigu; cela est d'autant plus nécessaire, que dans ce second cas on est censé ne connaître que l'angle A, ce qui ne nous permet pas même de recourir au moyen indiqué (art. **102**) pour vérifier si B est obtus ou aigu; quand une condition ajoutée à celle du problème nous l'aura donc appris, on déterminera d'abord l'angle B par cette proportion Fig. 31.

$$a : \sin A :: b : \sin B;$$

ensuite, au moyen de A et de B, on trouvera

$$C = 180 - (A + B) \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

et enfin on obtiendra c par la proportion

$$\sin A : a :: \sin C : c,$$

ce qui revient à la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

106. Au lieu d'employer l'angle C, on peut, au moyen d'une formule usitée par les astronomes, exprimer le second membre de cette équation en fonction des angles A et B et de leurs côtés opposés.

Pour cela, l'angle C peut être obtus ou aigu; dans le premier cas, prolongeons indéfiniment le côté BC (*fig.* 32) jusqu'en D, et menons la parallèle CE à BA; nous aurons Fig. 32.

$$DCA = DCE + ACE,$$

et en observant que les angles DCE et B sont égaux comme correspondants et que les angles ACE et A le sont comme alternes internes, en mettant B et A à la place de DCE et de ACE, nous aurons

$$DCA = B + A;$$

mais DCA ayant le même sinus que son supplément, il en résulte que

$$\sin C = \sin(B + A).$$

Fig. 33. Dans le second cas, prolongeons AB jusqu'en F (*fig.* 33), et menons BG parallèle à CA, nous aurons

$$\text{l'}\textit{angle extérieur}\ CBF = GBF + GBC,$$

ou, parce que GBF est égal à A comme correspondant, et que GBC est égal à C comme alterne interne,

$$CBF = A + C.$$

On tire, de cette dernière équation,

$$C = CBF - A;$$

et, en prenant les sinus,

$$\sin C = \sin(CBF - A); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

la formule (26), dans laquelle on prendra les signes inférieurs, nous donnera

$$\sin(CBF - A) = \sin CBF \cos A - \cos CBF \sin A; \quad \ldots (80)$$

or le sinus de CBF étant le même que celui de son supplément, nous pouvons remplacer sin CBF par sin B, et la formule (80) deviendra

$$\sin(CBF - A) = \sin B \cos A - \cos B \sin A = \sin(B - A);$$

substituant cette valeur dans l'équation (79), et renfermant les deux cas dans un seul, nous aurons

$$\sin C = \sin(B \pm A);$$

mettant cette valeur dans l'équation (78), on aura

$$c = a\frac{\sin(B \pm A)}{\sin A}.$$

Fig. 34. **107.** 3e *cas.* — *Étant donnés deux côtés* (fig. 34) BC $= a$, AC $= b$ *et l'angle compris* C, *déterminer les trois autres choses du triangle.*

Pour parvenir à la solution de cette question, nous allons démontrer préliminairement que lorsqu'on a la somme de deux

quantités et leur différence, la plus grande est égale à la demi-somme plus la demi-différence de ces quantités; et que la plus petite est égale à la demi-somme moins leur demi-différence.

En effet, soient x et y ces quantités inconnues dont la différence est a et la somme b, nous avons donc par la nature du problème,

$$x + y = a, \quad x - y = b; \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

ajoutant ces équations, on trouve

$$2x = a + b,$$

ou

$$x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b. \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Retranchant ensuite les équations (81) l'une de l'autre, on trouve

$$2y = a - b,$$

ou

$$y = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b. \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

Cela posé, les côtés étant proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés (art. **100**), nous aurons

$$a : b :: \sin A : \sin B;$$

nous tirerons de cette proportion ces deux-ci:

$$a + b : b :: \sin A + \sin B : \sin B, \ldots\ldots \quad (84)$$

$$a - b : b :: \sin A - \sin B : \sin B; \ldots\ldots \quad (85)$$

changeant les moyens de place dans les proportions (84) et (85), les seconds rapports étant les mêmes, il y aura proportion entre les premiers; de sorte que nous aurons

$$a + b : \sin A + \sin B :: a - b : \sin A - \sin B;$$

changeant les moyens de place, il viendra

$$a + b : a - b :: \sin A + \sin B : \sin A - \sin B. \ldots \quad (86)$$

Or nous avons vu (art. **46**) qu'on avait

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B);$$

Fig. 34. substituant le second rapport au premier dans la proportion (86), nous obtiendrons

$$a + b : a - b :: \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B). \quad . \quad . \quad (87)$$

ce que l'on énonce ainsi : *la somme des deux côtés est à leur différence, comme la demi-somme des angles opposés à ces côtés est leur demi-différence.*

La demi-somme des angles A et B est connue, puisque l'angle C étant donné, on a

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C.$$

Par conséquent, la proportion (87) fera connaître la demi-différence de ces angles. Représentons par m leur somme, et par n leur différence, et supposons que A surpasse B; nous aurons, en vertu des équations (82) et (83),

$$A = \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}n, \qquad B = \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}n;$$

au moyen de l'un de ces angles et de son côté opposé, on déterminera facilement le côté c par la proportion suivante, qu'on déduira de la proportion (75),

$$\sin A : \sin C :: a : c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

108. Si dans l'équation (84) nous changeons les moyens de place, nous aurons

$$a + b : \sin A + \sin B :: b : \sin B;$$

remplaçant le rapport $b : \sin B$ par celui-ci, $c : \sin C$, tiré de la proportion (76), nous aurons

$$a + b : \sin A + \sin B :: c : \sin C;$$

d'où nous tirerons

$$c = \frac{(a+b)\sin C}{\sin A + \sin B}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

On peut mettre cette équation sous une autre forme. En effet si, dans la première des formules (28), nous faisons $2a = C$, nous obtiendrons

$$\sin C = \frac{2\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{r}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

et si dans l'équation (46) nous faisons $\alpha = A$ et $\beta = B$, elle nous donnera, en mettant le second membre à la place du premier,

$$\sin A + \sin B = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{r}; \quad \ldots (91)$$

introduisant dans l'équation (89) les valeurs de sin C et de sin A + sin B données par les équations (90) et (91), nous trouverons

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}; \quad \ldots\ldots\ldots (92)$$

or $\sin \frac{1}{2}(A+B) = \sin \frac{1}{2}(180 - C) = \sin (90 - \frac{1}{2} C) = \cos \frac{1}{2} C$.

Au moyen de cette expression, l'équation (92) deviendra

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2} C};$$

supprimant le facteur commun, il restera

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

ce qui nous fournit un nouveau moyen de trouver la valeur du côté c.

La différence A — B sera donnée (art. 107) par la proportion (87), de laquelle on tire

$$\tang \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \tang \frac{1}{2}(A+B); \quad \ldots\ldots (94)$$

on peut même délivrer le second terme de cette équation de la quantité A + B; car l'équation

$$C = 180 - (A + B)$$

donne $\frac{1}{2} C = 90 - \frac{1}{2}(A + B)$,

d'où l'on tire $\frac{1}{2}(A + B) = 90 - \frac{1}{2} C$;

et en prenant les tangentes,

$$\tang \frac{1}{2}(A+B) = \tang (90 - \tfrac{1}{2} C). \quad \ldots\ldots\ldots (95)$$

Or il est évident que $\tang (90 - \frac{1}{2} C)$ n'est autre chose que la tangente du complément de l'angle $\frac{1}{2} C$, c'est-à-dire est la cotangente de cet angle. Remplaçant donc $\tang (90 - \frac{1}{2} C)$ par $\cot \frac{1}{2} C$ dans l'équation (95), nous aurons

$$\tang \frac{1}{2}(A+B) = \cot \tfrac{1}{2} C;$$

par conséquent, l'équation (94) deviendra

$$\tang \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Telle est la formule la plus simple qui déterminera la valeur de la demi-différence des angles A et B.

109. 4e *cas.* — Connaissant les trois côtés d'un triangle, déter-
Fig. 34. miner les angles. Soient toujours (*fig.* 34) a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, et supposons d'abord l'angle A aigu; si du sommet C nous abaissons la perpendiculaire CD, les triangles CBD, CAD nous donneront ces deux valeurs de CD^2 :

$$CD^2 = BC^2 - BD^2, \quad CD^2 = AC^2 - AD^2;$$

éliminant CD^2, il viendra

$$BC^2 - BD^2 = AC^2 - AD^2,$$

d'où nous tirerons

$$BC^2 = AC^2 + BD^2 - AD^2;$$

remplaçant BD^2 par $(AB - AD)^2$ et réduisant, on obtiendra

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD,$$

ou $$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD; \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

et comme, en prenant le rayon pour unité, on a (art. 85)

$$AD = AC \cos A$$

ou $$AD = b \cos A; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

en substituant cette valeur dans l'équation (96), nous aurons

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

Si l'angle A est obtus, le triangle étant alors représenté par ABC'
Fig. 35. (*fig.* 35), la perpendiculaire C'D' tombe sur le prolongement AD' du côté BA, et nous avons ces deux valeurs de $C'D'^2$,

$$C'D'^2 = BC'^2 - BD'^2, \quad C'D'^2 = AC'^2 - AD'^2.$$

En les égalant entre elles, et en remplaçant BD'^2 par sa valeur $AB + AD'$, on trouve, après avoir réduit,

$$BC^2 = AC'^2 + AB^2 + 2AB \times AD',$$

ou $$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD'; \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

dans ce cas, au lieu de l'équation (97), nous aurons

$$AD' = b \times - \cos A.$$

En effet, les angles C'AB, C'AD' se trouvant, l'un tourné à droite, l'autre tourné à gauche, leurs cosinus sont de signes contraires, par la même raison que si la droite AD est positive, la droite AD' sera négative; ainsi nous aurons Fig. 35.

$$AD' = - b \cos A. \quad (*)$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (87), la convertit en

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad \ldots \ldots (100)$$

et nous retombons dans l'équation (99), ce qui nous montre que cette équation convient aussi bien au cas de l'angle A aigu que de l'angle A obtus.

110. Pour distinguer ces cas l'un de l'autre, on sait par la Géométrie que le premier arrive lorsque la somme des carrés des côtés qui forment l'angle surpasse le carré du troisième côté; et qu'au contraire cet angle sera obtus lorsque la somme de ces carrés sera moindre que le carré du troisième côté.

On tire de l'équation (100)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad \ldots \ldots \ldots (101)$$

111. Cette valeur de cos A se composant de plusieurs carrés, la formule (101) se prête peu commodément aux calculs

(*) C'est ce que l'on peut voir encore en cherchant la valeur de l'angle obtus BAC', par la formule (26), dont on prend le signe inférieur; car en considérant que sin 180 étant nul, la formule (26) réduite à son premier terme, on a

$$\cos BAC' = \cos (180^\circ - A) = - 1 \times \cos A = - \cos A.$$

où l'on emploie les logarithmes. C'est pourquoi nous allons chercher une autre formule.

Remplaçant cos A par sa valeur tirée de l'équation 30 (art. 37), dans laquelle nous ferons $r = 1$ et $a = A$, nous trouverons

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A ; \quad \ldots\ldots (102)$$

mettant la valeur de cos A donnée par l'équation (101), on obtiendra

$$1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots\ldots (103)$$

Changeant les signes et transposant l'unité dans le second membre, il viendra

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} ;$$

réduisant le second membre au même dénominateur, on trouvera

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc}, \ldots\ldots (104)$$

et par conséquent

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc},$$

et, observant que la différence de deux carrés $m^2 - n^2$ est $(m + n)(m - n)$, on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4bc} ;$$

tirant la racine carrée, on aura enfin

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4bc}} \ldots (105)$$

Représentant le demi-périmètre du triangle par s, nous aurons

$$a + b + c = 2s ;$$

d'où nous tirerons

$$a + b - c = 2(s - c),$$
$$a + c - b = 2(s - b);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (105), nous obtiendrons

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}; \quad \ldots \quad (106)$$

ce qui nous indique ce procédé pour obtenir le sinus de la moitié de l'angle A : *retranchez successivement du demi-périmètre chacun des côtés qui forment l'angle, et divisez le produit des deux résidus par celui des côtés adjacents à l'angle; et tirez la racine carrée du quotient.*

112. Le sinus déterminé par cette équation appartient au cercle dont le rayon est l'unité; si l'on voulait avoir le sinus du cercle décrit avec le rayon des tables, on le déterminerait par cette proportion

$$1 : r :: \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}} : \text{sinus } \textit{tabulaire};$$

ce qui nous donnerait, pour le sinus tabulaire,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = r\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}. \quad \ldots \quad (107)$$

113. Nous pouvons aussi déterminer l'angle A par le cosinus. Pour cela, reprenons l'équation (104), et substituons-y la valeur de $\sin^2 \frac{1}{2} A$ tirée de la formule (1), qui lorsque le rayon est pris pour unité, et que a est remplacé par $\frac{1}{2} A$, devient

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A + \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1,$$

nous aurons

$$1 - \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc};$$

changeant les signes, et transposant l'unité dans le second membre, on aura

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2bc}{4bc};$$

réduisant au même dénominateur, et effaçant les quantités qui se détruisent, il restera

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc};$$

donc

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc},$$

et en décomposant la différence des carrés en deux facteurs, il viendra

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc};$$

faisant

$$b + c + a = 2s,$$

on aura

$$b + c - a = 2s - 2a;$$

substituant ces valeurs et réduisant, il restera

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{s(s-a)}{bc};$$

et, en tirant la racine carrée,

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Cette équation, comme l'équation (106), a lieu dans l'hypothèse du rayon pris pour unité; mais si l'on voulait que le cosinus fût celui des tables, en vertu du procédé dont nous avons fait usage (art. **112**), nous aurions, pour le cosinus tabulaire,

$$\cos \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Enfin on peut exprimer la valeur de l'angle au moyen de la tangente; pour cela, il suffit de diviser l'équation (106) par l'équation (108), ce qui donnera

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

114. Enfin nous trouverons (comme dans l'art. **112**), pour la tangente tabulaire,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

La formule (110), comme la formule (107), nécessite l'emploi de quatre logarithmes, mais lui devient préférable lorsqu'on cherche deux angles;

car si, par exemple, le second est B, nous avons

$$\sin \tfrac{1}{2} B = r \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = r \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \ldots \quad (111)$$

Or la première des formules (111), et celle du n° 107, ont deux logarithmes communs, savoir, ceux de $s-c$ et de c; tandis qu'entre la formule (110) et la seconde des formules (111) il y en a trois : ceux de s, de $s-b$ et de $s-c$; dans ce dernier cas, on a un logarithme de moins à chercher.

CHAPITRE IX.

Application des règles prescrites dans la résolution des triangles obliquangles à des exemples.

Problème Ier.

115. Proposons-nous d'évaluer la distance AC qui existe (*fig.* 36) entre le pied A d'un arbre et la porte C d'un édifice. Pour cela, supposons qu'ayant mesuré une base arbitraire AB et les angles A et B, on ait trouvé $AB = 68^m$, $A = 46°$, $B = 61°$; ajoutant l'angle A à l'angle B, on trouvera que leur somme est de 107 degrés; cette somme étant retranchée de 180 degrés, on trouvera 73 degrés pour la valeur de l'angle C, et l'on établira (art. 100) la proportion suivante : Fig. 36.

$$\sin 73° : AB :: \sin 46° : BC,$$

ou

$$\sin 73° : 68^m :: \sin 46° : BC;$$

donc

$$BC = \frac{68 \sin 46°}{\sin 73°}$$

Opérant par logarithmes, on a

$$\log C = \log \sin 46° + \log 68 - \log \sin 73°,$$

ce qui nous conduit à cette opération :

$$\begin{aligned} \log \sin 46^\circ &= 9,8569341 \\ \log 68^m &= 1,8325089 \\ \text{compl. du log de } \sin 73^\circ &= 0,0194037 \\ \hline & 11,7088467 \end{aligned}$$

Supprimant le premier chiffre à cause du complément, il reste 1,7088467, logarithme qui répond à $51^m,15$.

Problème II.

Fig. 37. **116.** *Mesurer la largeur* AB *d'un précipice* (fig. 37) *ou d'un étang* (fig. 38), *lorsqu'un opérateur qui a établi sa station en* A, *arrêté par des obstacles invincibles, ne peut se transporter vers* B.

On dirigera un rayon visuel AC vers un point C situé du côté opposé à A. Ce point étant situé hors du précipice ou de l'étang, l'angle ABC sera nécessairement obtus; mais on ne pourra mesurer que l'angle A, et par des moyens trigonométriques, on parviendra à connaître les côtés AC et BC du triangle ABC. Supposons qu'on ait trouvé

$$AC = 139^m, \quad BC = 95^\circ, \quad A = 42^\circ,$$

on tombera dans le second cas de la résolution des triangles obliquangles, ayant deux côtés et un angle adjacent à l'un d'eux, on déterminera donc l'angle B par la proportion

$$95^m : 139^m :: \sin 42^\circ : \sin B;$$

opérant par logarithmes, on aura

$$\begin{aligned} \log \sin 42^\circ &= 9,8255109 \\ \log 139^m &= 2,1430148 \\ \text{compl. du log de } 95^m &= 8,0222764 \\ \hline & 19,9908021 \end{aligned}$$

Retranchant 10 unités à la caractéristique, il restera

$$9,9908021;$$

cherchant ce logarithme dans les tables, on trouve qu'il répond au sinus de $78^\circ 15'$.

L'angle B étant obtus, ce sinus ne peut appartenir qu'à l'angle CBD, supplément de ABC; donc l'angle ABC, qui est égal à $180^\circ - 78^\circ 15'$, équivaut à $101^\circ 45'$.

Ajoutant cet angle à l'angle A, on trouve

$$A + ABC = 143^\circ 45' \text{ pour la somme de ces angles.}$$

Cette somme étant retranchée de 180 degrés, il reste

$$36^\circ 15' \text{ pour l'angle C.}$$

Nous pouvons donc maintenant établir la proportion suivante pour déterminer AB :

$$\sin 42^\circ : 95^m :: \sin 36^\circ,15' : AB.$$

Appliquant les logarithmes à cette proportion, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \log 95^m & = & 1,9777236 \\ \log \sin 36^\circ 15' & = & 9,7718150 \\ \text{compl. du log de } \sin 42^\circ & = & 0,1744891 \\ \hline & & 11,9240277 \end{array}$$

Retranchant une dizaine de la caractéristique, à cause du complément, il reste 1,9240277, logarithme qui répond au nombre $83^m 95$.

Problème III.

117. *Trouver* (fig. 39) *la distance qui existe entre deux points inaccessibles.* Fig. 39.

Ayant pris les stations A et B desquelles on puisse voir les deux objets C et D, on mesurera la base AB, ainsi que les angles en A et en B du triangle CBA; on déterminera, par le 1er cas de la résolution des triangles obliquangles, le rayon visuel BC; et ensuite, à l'aide du triangle ADB, dans lequel on connaît la base AB et les deux angles en A et en B, on

déterminera le rayon visuel BD; et si l'on retranche ensuite l'angle CBA de l'angle DBA, on connaîtra l'angle CBD compris entre les deux rayons visuels que l'on vient d'obtenir. Il sera donc facile de déterminer le côté CB par le 3e cas de la résolution des triangles obliquangles.

Par exemple, si l'angle CBD a été trouvé de 28 degrés, et si par le 1er cas de l'égalité des triangles on a ainsi évalué les rayons visuels

$$CB = 38^m, \quad DB = 26^m,$$

la somme de ces rayons visuels sera de 64 mètres, et leur différence de 12 mètres.

Quant à la somme des angles C et D du triangle CBD, elle se trouvera en retranchant de 180 degrés l'angle CBD, qui, d'après l'observation, a été trouvé de 28 degrés; ce qui donnera 152 degrés pour C + D. Donc la demi-somme de ces angles est de 76 degrés, et l'on pourra établir cette proportion en vertu de l'art. **107** :

$$CB + BD : CB - BD :: \tang \tfrac{1}{2}(D + C) : \tang \tfrac{1}{2}(D - C),$$

ou $$64 : 12 :: \tang 76^\circ : \tang \tfrac{1}{2}(D - C);$$

opérant par logarithmes,

log de tang de 76°	=	10,6032289
log de 12m	=	1,0791812
compl. du log de 64m	=	8,1938200
Somme		19,8762301

Retranchant 10 à la caractéristique, à cause du complément, il restera 9,8762301, logarithme qui appartient à la tangente de 36° 56′, demi-différence des angles D et C.

Par conséquent (art. **107**),

le plus grand angle $= \frac{1}{2}$ *somme* $+ \frac{1}{2}$ *différ.* $= 112^\circ 56'$,

le plus petit angle $= \frac{1}{2}$ *somme* $- \frac{1}{2}$ *différ.* $= 39^\circ 4'$;

et comme le plus grand angle est opposé au plus grand côté,

on a

$$\textit{angle}\ \mathrm{CDB} = 112^\circ\,56', \quad \textit{angle}\ \mathrm{BCD} = 39^\circ\,4';$$

on pourra donc enfin (art. **89**) déterminer CD par la proportion

$$\sin 39^\circ 4' : 26 :: \sin 28^\circ : \mathrm{CD};$$

opérant par logarithmes, on aura donc

$$\begin{array}{rr} \text{log de } \sin 28^\circ = & 9,671\,609\,3 \\ \text{log de } 26^{\mathrm{m}} = & 1,414\,973\,3 \\ \text{compl. du log de } \sin 39^\circ,4' = & 0,200\,504\,9 \\ \hline & 11,287\,087\,5 \end{array}$$

et l'on voit que le logarithme de 1,287 087 5 répond à $19^{\mathrm{m}},368$.

Problème IV.

118. *Déterminer trigonométriquement l'angle qui existe entre les rayons visuels* AB, AD (fig. 40), *dirigés vers deux objets* M et N, *sans recourir au graphomètre et à aucun autre instrument propre à mesurer les angles.* Fig. 40.

Pour cela, ayant pris arbitrairement deux points C et B sur les directions AM et AN de deux rayons visuels qui partent du point de station A, on formera le triangle ABC, dont on mesurera les côtés. Supposons qu'on ait trouvé

$$\mathrm{AB} = 46\ \textit{décimètres}, \quad \mathrm{AC} = 42\ \textit{décim.}, \quad \mathrm{BC} = 28\ \textit{décim.};$$

si l'on représente par $2s$ le périmètre du triangle ABC, on aura (art. **111**)

$46+42+28$ ou 116 *déc.* $=2s$, et par conséquent 58 *déc.* $= s$;

donc

$$(s-c)(s-b) = (58-46)(58-42) = 12 \times 16 = 192,$$

$$bc = 1932;$$

introduisant ces valeurs dans la formule (107), changeant le

radical en exposant fractionnaire et opérant par logarithmes, on trouve

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = 10 + \log \left(\frac{192}{1932}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

ou, d'après la propriété de logarithmes (art. **64**),

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = 10 + \tfrac{1}{2} \log \frac{192}{1932};$$

ou, conformément à la règle prescrite (art. **76**) pour les logarithmes des fractions,

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = 10 - \tfrac{1}{2} [\log 1932 - \log 192],$$

et en effectuant les opérations,

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = 10 - 0{,}501\,352\,9;$$

et en faisant la soustraction indiquée,

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = 9{,}498\,647\,1;$$

ce logarithme appartenant au sinus de 18° 22′, nous avons

$$A = 36° 44'.$$

Si l'on voulait connaître les autres angles, cela serait facile, puisqu'il suffirait maintenant de faire usage du moyen prescrit par l'art. **100**, pour déterminer l'un de ces angles.

Problème V.

119. *Trouver la hauteur verticale d'une montagne ou d'un clocher.*

Fig. 41. Ayant choisi deux points de station A et B (*fig.* 41), où l'on transportera successivement le centre du graphomètre, dont le pied est représenté par les droites A*a* et B*b*, on mesurera les angles CAB, CBA; et opérant comme l'exige le premier cas des triangles obliquangles, on déterminera le rayon visuel AC;

on mesurera ensuite l'angle CAD, et l'on connaîtra dans le triangle rectangle CAD, outre l'angle droit D, l'angle CAD et le côté CA; par conséquent, au moyen de cette proportion (art. 86)

$$r : \sin A :: AC : CD,$$

on déterminera la distance CD du point C à la ligne horizontale AD, et l'on y ajoutera la longueur du pied de l'instrument.

Problème VI.

120. *Des mineurs* (fig. 42) *creusent une montagne, et ayant travaillé dans le sens de* A *en* D, *sont arrivés au point* D; *on demande à déterminer la direction que doivent prendre d'autres mineurs qui sont derrière la montagne, pour être dans le même alignement.* Fig. 42.

Prenant un point de station C qui aperçoive le point A et la partie postérieure de la montagne, on mesurera l'angle DAC, l'angle arbitraire ACB et le côté AC; comme dans le triangle ACB, on connaît deux angles et un côté compris, on calculera le côté CB qui déterminera le point B de l'alignement.

Il ne s'agira plus que de connaître un autre point G de cet alignement. Pour cela, opérant de la même manière, on mesurera l'angle arbitraire ACG, et on calculera dans le triangle ACG le côté CG du triangle ACG, dont l'extrémité G sera dans l'alignement demandé.

Problème VII.

121. On peut se proposer cet autre problème qui a beaucoup d'analogie avec le précédent: *Deux points* A *et* B (fig. 42) *étant donnés de chaque côté d'une montagne, on demande dans quelle direction doivent être placés des mineurs; pour qu'ils se rencontrent suivant l'alignement de* AB. Fig. 42.

Pour cela, ayant pris un point de station C qui aperçoive

les points donnés A et B, et l'angle compris ACB, on mesurera les distances AC et CB aux points de stations A et B; et alors, au moyen du 3e cas de la résolution des triangles obliquangles, on trouvera les angles A et B, et par conséquent les directions des droites AD et GB.

Fig. 43. Il pourrait arriver que d'un point C (*fig.* 43) on ne pût voir à la fois A et B. Dans ce cas on cherchera un autre point L qui aperçoive A et C; et ayant mesuré l'angle ALC et les côtés AL, CL du triangle ACL, on déterminera le côté AC et l'angle ACL par le 3e cas de la résolution des triangles obliquangles; et comme le point C, par hypothèse, peut voir les points L et B, on mesurerait l'angle LCB, duquel retranchant ACL, il resterait ACB. Il ne s'agirait plus que de mesurer CB, et ayant alors un angle compris entre deux côtés, on retomberait dans le 3e cas de la résolution des triangles obliquangles.

Problème VIII.

Fig. 44. **122.** *D'un point* A (fig. 44), *situé sur une colline, déterminer la largeur d'une rivière inaccessible qu'on aperçoit dans la plaine.*

Ayant pris une base AB et mesuré les angles A et B du triangle ABC, je calculerai la longueur du rayon visuel qui, partant de B, aboutit au point C; par une même opération, je trouverai la longueur du rayon visuel BD; et, mesurant l'angle CBD, j'aurai dans le triangle BCD un angle en B, compris entre des côtés connus; je pourrai donc déterminer la valeur CD. Par des opérations semblables, j'obtiendrai les valeurs de CE et de ED. Ayant trouvé ainsi les trois côtés du triangle ECD, le 4e cas de la résolution des triangles obliquangles me fera connaître l'angle D; et la perpendiculaire CF, qui est la largeur de la rivière, aura pour expression CD cos D (art. 78).

FIN DE LA TRIGONOMÉTRIE.

THÉORIE
DES COURBES
DU SECOND ORDRE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

De l'application de l'analyse déterminée à la solution des problèmes de Géométrie.

123. L'Algèbre étant la science des rapports qui existent entre les quantités, on sent qu'elle doit être d'un grand secours dans la résolution des problèmes de Géométrie, dont le but est toujours de découvrir certaines propriétés dont jouissent les lignes, les surfaces, ou les volumes. Mais il sera plus difficile de se former une idée claire des circonstances que ce nouvel usage de l'Algèbre doit faire naître. Un seul problème jettera un grand jour sur cette matière.

124. Proposons-nous de *trouver la base d'un triangle d'une hauteur connue, et dont la surface soit égale à celle d'un carré donné.*

Soit x la base cherchée, h la hauteur, et c le côté donné du carré : la surface du triangle sera $\frac{1}{2}hx$; comme elle doit égaler le carré c^2, on aura donc l'équation $\frac{1}{2}hx = c^2$.

Cette équation résolue donne $x = \frac{c^2}{\frac{1}{2}h}$. Ce résultat indique que x doit être une troisième proportionnelle à $\frac{1}{2}h$ et à c. En effet, on voit que le quatrième terme de la proportion

$$\tfrac{1}{2}h : c :: c : x, \text{ est égal à } \frac{c^2}{\frac{1}{2}h}.$$

Fig. 45. Si l'on prend donc deux lignes (*fig.* 45) AD $= \frac{1}{2}h$, CD $= c$, formant entre elles un angle droit; qu'on unisse les points A et C par une droite AC, qu'au point C on élève sur AC une perpendiculaire CB, la partie DB sera la valeur de x; car la ligne DC étant une moyenne proportionnelle entre AD et DB, on aura

$$\text{AD} : \text{CD} :: \text{CD} : \text{DB},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}h : c :: c : x,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{c^2}{\frac{1}{2}h}.$$

125. Si nous examinons la marche que nous avons suivie, nous verrons que la résolution de ce problème se compose de trois parties : la première consiste à mettre le problème en équation, la seconde à le résoudre, et la troisième à déduire de la valeur de x le procédé géométrique qui doit déterminer cette inconnue; c'est ce qu'on appelle construire la formule.

126. Différentes propositions de géométrie peuvent servir, suivant le cas, à mettre le problème en équation. Celles du carré de l'hypoténuse et des lignes proportionnelles en sont les principales. Le dégagement de l'inconnue ne peut offrir d'autres difficultés que celles qui tiennent à l'Algèbre : mais il n'en est pas de même des constructions, ainsi que nous le verrons dans la solution des problèmes suivants, qui serviront à éclaircir ce que peuvent avoir d'abstrait des idées trop générales.

Problème I.

Inscrire un carré dans un triangle.

127. La solution de ce problème se réduit à trouver sur la hauteur SG du triangle SOR (*fig.* 46) un point I, tel que la parallèle MN à la base, menée par ce point, soit égale à IG. Fig. 46.

Représentons par a la base OR, par b la hauteur SG, et par x et z les lignes inconnues IG et MN : les côtés OR et MN étant parallèles, on aura la proportion

$$a : z :: b : b - x,$$

d'où l'on tire $$ab - ax = bz.$$

Si nous ne considérons que cette équation, la valeur de x est indéterminée. En effet, cette équation n'exprime que la condition du parallélisme des côtés OR et MN, et convient par conséquent à tous les rectangles inscrits dans le triangle : il faut donc une seconde équation pour distinguer, entre ces rectangles, celui dont les côtés sont égaux : cette nouvelle équation sera $z = x$.

Substituons cette valeur dans l'équation précédente :

on obtient $$x = \frac{ab}{a + b}.$$

128. Pour construire cette valeur, on formera un angle arbitraire BAC (*fig.* 47), et prenant Fig. 47.

$$AD = b, \quad DB = a = AC,$$

si l'on mène la parallèle DE à la ligne BC, qui joint les extrémités B et C, la partie AE sera la valeur de x, car la propriété des lignes proportionnelle nous donne

$$AB : AC :: AD : AE,$$

ou $$a + b : a :: b : AE,$$

d'où l'on tire $$AE = \frac{ab}{a+b} = x.$$

129. On peut construire la valeur de x d'une manière plus élégante. Pour cet effet, sur la base $OR = a$ de ce triangle
Fig. 48. (*fig.* 48), formez un carré RT, et de l'extrémité S de la hauteur $SG = b$ menez à l'angle T du carré la droite ST. La perpendiculaire PM, élevée au point où TS rencontre la base, déterminera le côté du carré demandé : car les triangles semblables STU, SPG donnent la proportion SU : SG :: ST : SP, et les triangles semblables STO, SPM donnent cette autre proportion TO : PM :: ST : SP ; et à cause du rapport commun ST à SP, on tire de ces deux proportions cette nouvelle

$$SU : SG :: TO : PM;$$

donc $$PM = \frac{TO \,.\, SG}{SU} = \frac{ab}{a+b}.$$

PROBLÈME II.

Fig. 49. **130.** *Partager une ligne* AB (*fig.* 49) *en deux parties, telles que le rectangle qu'elles forment soit égal à un carré donné.*

Nommons c le côté de ce carré, a la ligne donnée, et x l'une des parties : l'autre sera $a - x$, et par conséquent $(a - x)\,x = c^2$.

Cette équation, étant résolue, donne

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - c^2} \quad \text{et} \quad x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - c^2}.$$

Ces deux valeurs sont positives, parce que $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c^2}$ ne peut qu'être moindre que $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$ ou que $\frac{1}{2}a$.

131. Si l'on ajoute ces valeurs de x ensemble, on verra qu'elles reproduiront a; ce qui nous apprend qu'elles représentent chacune l'un des côtés du rectangle cherché; et, en effet, n'ayant distingué l'un de ces côtés par aucune condition particulière, x conviendra indistinctement à l'un et à l'autre.

La partie radicale devient imaginaire, lorsque c surpasse $\frac{1}{2}a$; cela nous indique que le côté du carré ne doit pas excéder la moitié de la ligne donnée, pour que le problème soit possible.

132. Les valeurs de x se construisent de la manière suivante. Soit $AB = a$ (*fig.* 49), $EB = \frac{1}{2}a$, je décris sur $EB = \frac{1}{2}a$ un demi-cercle EMB, et je prends une corde $BM = c$. La ligne ME sera la valeur du radical; car l'angle EMB étant droit, la propriété du carré de l'hypoténuse donne Fig. 49.

$$EB^2 = MB^2 + EM^2,$$

ou

$$\frac{1}{4}a^2 = c^2 + EM^2,$$

d'où l'on tire

$$EM = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c^2}.$$

On prendra ensuite $EN = EM$, et mettant EN à la place du radical dans les valeurs de x, la première deviendra

$$x = \frac{1}{2}a + EN = AE + EN = AN,$$

et la seconde se réduira à

$$x = \frac{1}{2}a - EN = EB - EN = NB.$$

Problème III.

133. *Diviser un triangle, par une parallèle à sa base, en deux parties qui soient dans le rapport de* m *à* n.

Nommons a la base AB (*fig.* 50) de ce triangle ABC, et h hauteur CH, et représentons par G le point cherché par où doit passer la parallèle EF qui divise le triangle dans le rapport demandé; les quantités inconnues sont $CG = x$, $EF = z$. Fig. 50.

Le parallélisme des lignes AB et EF nous donne la proportion

$$AB : EF :: CH : CG,$$

ou

$$a : z :: h : x,$$

d'où l'on tire

$$ax = hz.$$

Il ne s'agit que de trouver une seconde équation qui exprime la condition que la surface ABFE soit à la surface CEF dans le rapport de m à n.

Le trapèze ABFE $= \frac{(a+z)}{2}(h-x)$.

Le triangle CEE $= \frac{zx}{2}$.

Par conséquent,

$$\frac{(a+z)}{2}(h-x) : \frac{zx}{2} :: m : n;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, et supprimant le diviseur commun 2, on a

$$n(a+z)(h-x) = mzx.$$

Mettant pour z sa valeur tirée de l'équation $ax = hz$, cette seconde devient

$$n\left(a + \frac{ax}{h}\right)(h-x) = \frac{max^2}{h}.$$

Multipliant par h, et supprimant a qui entre comme facteur dans chacun des membres, il viendra

$$n(h+x)(h-x) = mx^2,$$

ou $$n(h^2 - x^2) = mx^2,$$

d'où l'on tire $$x = \pm\sqrt{\frac{nh^2}{m+n}}.$$

Fig. 51. **134.** Pour construire cette valeur, on prendra (*fig.* 51) AD $= m + n$, et au point D on élèvera la perpendiculaire DC $= h$; et ayant tiré la droite AC, on construira en C l'angle droit ACB; et la ligne CB, en venant rencontrer le prolongement de AD, déterminera la partie DB qui aura pour expression $\frac{h^2}{m+n}$.

Car DB est une troisième proportionnelle aux lignes $m + n$ et h. (*Voyez* dans l'art. 124 un semblable cas.)

Ayant ensuite pris DE $= n$, et décrit sur EB comme diamètre le demi-cercle EMB, la ligne MD sera la valeur de x, attendu que la proportion

$$\text{DB} : \text{DM} :: \text{DM} : \text{ED},$$

ou

$$\frac{h^2}{m+n} : \text{DM} :: \text{DM} : n,$$

donne, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens,

$$\text{DM}^2 = \frac{nh^2}{m+n};$$

et tirant la racine,

$$\text{DM} = \pm\sqrt{\frac{nh^2}{m+n}} = x.$$

Il est évident que la partie positive DM doit être portée (*fig.* 50) de C en G; et, comme nous l'avons démontré dans la Trigonométrie (art. 26), la valeur negative doit l'être dans le sens contraire; c'est ce que nous allons de nouveau confirmer par les considérations suivantes. Fig. 50.

135. L'attribut des quantités négatives étant de sous-entendre un rapport d'opposition avec les positives, tel qu'une valeur positive soit toujours détruite par une autre négative égale, la présence d'une quantité positive devient nécessaire pour qu'on sache ce que signifie la négative.

Ainsi ayant trouvé un résultat tel que $-a$, pour en interpréter le sens, comparons-le à $+a$, et ajoutons à l'une et à l'autre de ces expressions la quantité positive $+c$, plus grande que a, nous aurons les deux quantités positives $c+a$ et $c-a$.

Si la ligne positive $c + a$ représente la distance de D en X (*fig.* 52), composée de DA $= c$ et de AX $= a$, la ligne $c - a$ représentera une distance moindre que nous Fig. 52.

devrons par conséquent porter dans le même sens de D en X′ : or la distance XX′ est égale à la différence $2a$ des quantités $c+a$ et $c-a$; et si de $XX' = 2a$ on retranche $AX = a$, on verra que la ligne négative $-a$ détermine un point X′, situé à une distance de A représentée par a, mais portée en sens contraire que celui selon lequel on devrait porter la ligne positive $+a$: donc l'idée de la ligne négative nous rappelle celle de la positive qui lui est égale, et nous voyons que la négative doit être portée dans un sens opposé.

156. Il résulte de ce qui précède que puisque la valeur du radical prise avec le signe positif est représentée (*fig.* 50) par la ligne CG, si l'on prend dans le sens contraire $CG' = CG$, on déterminera un second point G′ qui satisfera au problème ; en effet, puisque nous n'avons pas exprimé analytiquement de quel côté notre triangle ACB était tourné, sa position reste indéterminée ; par conséquent, en menant la parallèle E′F′, le triangle E′F′C résout le problème d'une seconde manière.

Problème IV.

157. *Sur le côté* AC *d'un triangle* ABC, *trouver un point* M *tel que la parallèle* MN *à la base* AB (fig. 53) *de ce triangle soit égale à une ligne donnée* m.

Fig. 53.

Soient $AB = a$, $AC = b$, $MN = m$, $AM = x$, on aura $CM = b - x$; et les triangles semblables CAB, CMN donneront la proportion

$$AB : MN :: AC : CM,$$

ou

$$a : m :: b : b - x ;$$

d'où l'on tirera

$$ab - ax = mb, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113)$$

et par conséquent

$$x = \frac{ab - mb}{a},$$

et, en observant que b est facteur commun,

$$x = \frac{b}{a}(a - m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

138. Par l'énoncé du problème, la ligne cherchée est plus petite que AB; cette condition est sous-entendue lorsqu'on suppose que dans l'équation (114) $a - m$ est une quantité positive; mais avec cette restriction, le problème n'embrasse pas le cas bien plus fréquent où la ligne donnée M'N' surpasserait AB. On sent que dans cette seconde hypothèse M'N' ne peut tomber que hors du triangle ABC. C'est ce que l'Algèbre nous montre, car lorsque m surpasse a, la quantité $a - m$ devient négative dans la formule (114), qui peut alors s'écrire ainsi

$$x = -\frac{b}{a}(m - a).$$

139. Dans cette seconde hypothèse, x étant donc négatif, nous voyons que le signe même est compris dans l'inconnue. Maintenant que nous la connaissons, désignons cette inconnue avec le signe qui lui convient, en changeant x en $-x$, dans l'équation (113); on obtiendra celle-ci

$$ab + ax = mb,$$

qui, parce que a est facteur commun, devient

$$a(b + x) = mb,$$

d'où l'on tirera la proportion

$$a : m :: b : b + x;$$

de sorte que nous voyons qu'au lieu de la différence $b - a$, qui exprime la distance du point A au point cherché, nous devons avoir une somme $a + m$ de deux lignes qu'on portera de C en M'; ce qui confirme ce que nous avons dit, que les lignes négatives doivent être portées en sens contraire des positives.

Cet exemple nous fait sentir comment on peut être conduit à une valeur négative, lorsqu'une restriction n'a pas été exprimée par l'Algèbre; ou, sans qu'il existe une restriction dans l'énoncé d'un problème, lorsqu'une valeur de x, que nous supposions positive, devait être négative, ou enfin lorsque x est susceptible de deux valeurs dont la négative nous indique une seconde solution du problème, à laquelle nous ne nous attendions pas.

140. On voit encore que les valeurs négatives déterminent des positions de lignes différentes de celles que nous supposions d'abord. Aussi ferons-nous disparaître entièrement toute trace de lignes négatives, si renonçant à compter les x depuis le point A, nous les comptons depuis le point C. Car dans ce cas nommant CM, x, et établissant la proportion

$$\text{AB} : \text{MN} :: \text{AC} : \text{CM},$$

ou

$$a : m :: b : x,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{b}{a} m.$$

Et l'on voit que, quel que soit m, x sera toujours positif.

141. Les valeurs négatives nous avertissent donc que nous devons prendre certaines lignes dans un sens différent de celui que nous leur supposons, erreur où nous avons pu être conduits par quelque restriction dans l'énoncé du problème; tandis que les valeurs imaginaires nous indiquent toujours quelque impossibilité dans une question proposée. C'est ce que nous allons voir dans le problème suivant.

Problème V.

Fig. 54. **142.** *Une ligne* AB *étant donnée* (fig. 54), *trouver sur sa direction un point* C *dont la distance en* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance en* B, *et la ligne entière.*

Désignons par a la ligne donnée AB, et par x la distance de A au point cherché : la distance de B à ce même point sera donc $a - x$, et l'on aura, d'après l'énoncé du problème, la proportion $a - x : x :: x : a$; égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a

$$a(a - x) = x^2;$$

cette équation, étant résolue, donne

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2};$$

cette valeur est positive si l'on ne considère que le signe supérieur du radical, parce qu'on a

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2} > \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a.$$

143. Pour construire cette première solution, élevez à l'extrémité de BA (*fig.* 56) une perpendiculaire AC égale à la moitié de cette ligne. Par la propriété du carré de l'hypoténuse, on aura Fig. 56.

$$CB^2 = AC^2 + AB^2:$$

donc, en tirant la racine, CB aura pour expression (*)

$$\sqrt{AC^2 + AB^2}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2};$$

retranchant $CE = \frac{1}{2}a$, il restera pour EB $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{1}{2}a$.

144. La seconde valeur de x, qu'on trouve en prenant le signe inférieur du radical, montre que, dans le sens opposé à A, on doit trouver sur le prolongement de cette ligne (*fig.* 54) un second point C′ qui satisfait encore au problème; ce qui ne Fig. 54.

(*) Nous ne mettons pas ici le signe $\pm$, parce que lorsque nous convenons tacitement de quel côté doit se porter CB, le signe qui nous l'indique devient inutile.

doit pas surprendre, parce que rien dans l'énoncé n'indique si le point cherché doit être sur AB ou sur son prolongement.

145. On peut d'ailleurs considérer que, dans la première solution, x se portant de A en C, si nous voulons regarder x comme appartenant à la seconde, où nous savons que l'inconnue représente une quantité négative, il faut changer le signe dont x est affecté; ou, si nous ne le changeons pas, il faut adopter que ce que nous regardions comme $+x$ dans l'équation $(a-x)\,a = x^2$, doit être pris ici pour $-x$; ainsi $a-x$, qui est une différence, devient dans cette seconde solution une somme.

Et comme dans l'expression $a-x$, la valeur de x doit être ôtée de AB, si l'on prend x dans un sens opposé, son effet sera d'augmenter AB : cette seconde valeur de x devra donc se porter de A en C′, et $(a-x)$ sera représenté par AB + AC′, et notre proportion deviendra

$$C'B : AC' :: AC' : AB,$$

et satisfera encore à l'énoncé du problème, comme on peut le vérifier.

146. Nous venons d'examiner les deux hypothèses où la distance de A au point cherché est exprimée par une ligne AC tombant sur AB, ou par une ligne AC′ qui en est le prolongement; examinons maintenant le cas où il faudrait traverser
Fig. 55. toute la ligne AB pour atteindre le point C″ (*fig.* 55) situé sur le prolongement de AB, du côté de B, c'est ce qu'on pourrait énoncer ainsi : *Trouver, sur le prolongement de la droite* AB$=a$, *un point* C″ *tel que la distance en* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance en* B *et la ligne entière.*

Je vais démontrer qu'aucun point de cette nature ne peut satisfaire au problème. En effet, la distance de A en C″ serait exprimée par $a+x$, et la proportion deviendrait

$$x : a+x :: a+x : a.$$

Or, il est impossible qu'une pareille proportion puisse subsister, car, dans toute proportion, le produit des extrêmes devant égaler celui des moyens, comme $a + x$ surpasse à la fois a et x, le produit $(a + x)^2$ des moyens l'emporte nécessairement sur le produit ax des extrêmes. L'Algèbre nous manifeste cette impossibilité; car si nous réduisons notre proportion en cette équation

$$ax = (a + x)^2,$$

on obtiendra

$$a^2 + ax + x^2 = 0,$$

équation qui, étant résolue, nous donnera

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}a^2},$$

ou, en faisant passer a^2 hors du radical,

$$x = -\frac{1}{2a} \pm a\sqrt{-\tfrac{3}{4}}.$$

Cette valeur imaginaire ne redresse donc pas l'énoncé de la question, comme les valeurs négatives, mais indique une absurdité dans cet énoncé.

Problème VI.

147. *Faire un triangle égal en surface au triangle* ABC (fig. 45), *et semblable au triangle* OSR (fig. 46). Fig. 45 et 46.

Soient $AB = c$, $CD = d$, $OR = g$, $SG = h$, x la base du triangle cherché, et y sa hauteur: par la considération de l'égalité des triangles, on a l'équation

$$\tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}cd, \quad \text{ou} \quad xy = cd;$$

par la condition de la similitude des triangles, on a la proportion

$$x : y :: g : h,$$

de laquelle on tire

$$y = \frac{hx}{g}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{hx^2}{g} = cd, \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{cdg}{h};$$

tirant la racine,

$$x = \pm\sqrt{\frac{cdg}{h}}.$$

Fig. 57. **148.** Pour construire cette valeur, on élèvera en O (*fig.* 57) sur la base OR du triangle une perpendiculaire OL $= d$, et par le point L on mènera la parallèle LM à OR. On coupera arbitrairement cette parallèle par une droite OM, sur la direction de cette droite on prendra OM et ON dans le rapport de h à g, et on mènera par le point N une seconde parallèle NE. La ligne OE vaudra $\frac{dg}{h}$; car les triangles semblables OLM, OEN, donnent la proportion

$$\text{OM} : \text{ON} :: \text{OL} : \text{OE},$$

ou

$$h : g :: d : \text{OE};$$

donc

$$\text{OE} = \frac{dg}{h}.$$

Prolongeant ensuite OE d'une partie OF $= c$, et sur EF comme diamètre, décrivant une demi-circonférence, la partie OI, déterminée par la rencontre de la circonférence avec la base OR, sera la valeur positive du radical; car OI étant une moyenne proportionnelle entre EO et OF, on a la proportion

$$\text{EO} : \text{OI} :: \text{OI} : \text{OF},$$

ou

$$\frac{dg}{h} : \text{OI} :: \text{OI} : c;$$

égalant le produit des moyens à celui des extrêmes,

$$OI^2 = \frac{cdg}{h}, \quad \text{et tirant la racine,} \quad OI = \pm\sqrt{\frac{cdg}{h}}.$$

149. Nous n'avons parlé que de la valeur positive de OI; il est évident que la valeur négative doit être portée de l'autre côté du point O, sur le prolongement de OI, et sert de base à un second triangle qui résout encore le problème (*).

(*) Pour construire les triangles sur ces deux bases, substituons la valeur $x = \pm$ OI dans l'équation $y = \frac{hx}{g}$, nous trouverons

$$y = \pm \text{OI}\,\frac{h}{g};$$

donc y a deux valeurs de signes contraires. La distance du point O au pied de cette perpendiculaire a aussi deux valeurs; car la similitude du triangle cherché au triangle OSR donne la proportion SG:OG::HK: *la distance de* O *au pied de la perpendiculaire.* Fig. 57.

Donc cette distance

$$= \frac{\text{OG.HK}}{\text{SG}} = \frac{\text{OG}.y}{h} = \pm\frac{\text{OG}}{h}\,\text{OI}.\frac{h}{g} = \pm\frac{\text{OG.OI}}{g}.$$

Comme ces deux valeurs sont égales, et de signes contraires, on obtiendra la seconde en portant la longueur OK (*fig.* 58) de la première de O en K'. Ce sera donc aux points K et K' que devront s'élever des perpendiculaires égales à y; et comme y a deux valeurs, on élèvera les quatre perpendiculaires KH, KH', K'H, K'H', et par conséquent nous aurons sur les deux bases OI et OI', quatre triangles qui satisferont au problème. Fig. 58.

On peut remarquer que ces quatre solutions données par la combinaison des signes répondent à des positions différentes des lignes, et que rien, dans l'énoncé du problème, ne déterminant de quel côté les lignes doivent être portées, l'Algèbre laisse cette position indéterminée; mais, si l'on veut se borner aux valeurs positives de x et de y, en admettant toujours l'hypothèse que les valeurs positives se portent de gauche à droite, le triangle OHI résoudra seul la question.

Dans cet exemple, on voit comment la condition non exprimée par l'Algèbre, que x et y doivent n'être que positifs, nous permet de choisir, parmi les solutions, celle qui remplit seule cette condition.

Problème VII.

Fig. 59. **130.** *D'un point* O *donné hors du cercle* AEDB (fig. 59), *mener une sécante telle, que sa partie* CD *interceptée par le cercle soit égale à une ligne donnée.*

Soient $OB = a$, $OA = b$, $CD = c$, $OC = x$; la propriété des sécantes extérieures nous donne cette proportion

$$OB : OD :: OC : OA,$$

ou

$$a : x + c :: x : b;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a

$$(x + c)x = ab,$$

ou

$$x^2 + cx = ab; \quad \ldots\ldots\ldots (115)$$

résolvant cette équation, on obtient

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} - \tfrac{1}{2}c.$$

Fig. 59. Pour construire la première valeur (*fig.* 59), je mène par le point O la tangente OE au cercle AED : cette tangente étant moyenne proportionnelle entre OB et OA, on aura

$$OB : OE :: OE : OA,$$

ou

$$a : OE :: OE : b,$$

ce qui donne $OE^2 = ab$. Si à l'extrémité de la ligne OE, j'élève en E la perpendiculaire $EF = \frac{1}{2}c$, par la propriété du carré de l'hypoténuse, j'aurai

$$OF^2 = EF^2 + OE^2,$$

ou

$$OF^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + ab;$$

donc

$$OF = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}.$$

Si je prends ensuite FK = EF = $\frac{1}{2}c$, j'aurai

$$OF = FK, \quad \text{ou} \quad OK = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} - \tfrac{1}{2}c,$$

pour la première valeur de x. Avec une ouverture de compas égale à cette valeur, et du point O pour centre, je décrirai l'arc KC qui déterminera le point C par où doit passer la sécante OC, dont la partie interceptée dans le cercle est égale à c.

151. A l'égard de la seconde valeur de x, qui est

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} - \tfrac{1}{2}c,$$

ou plutôt $$x = -\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} + \tfrac{1}{2}c\right),$$

on voit qu'elle est entièrement négative et doit être portée dans un sens opposé à celui de OC; cela résulte de ce que rien dans la solution du problème n'a déterminé si le cercle donné était à droite ou à gauche ; aussi, en prenant OA′ = OA, le cercle dont le diamètre A′B′ = AB appartient-il à la seconde valeur de x qu'on portera de O en C′, puisque la valeur absolue de cette ligne, c'est-à-dire en la considérant à part le signe, diffère de la première valeur de x de la quantité donnée c.

152. On conçoit bien que la seconde valeur doit se porter en sens opposé; mais on peut demander comment cette valeur négative résout le problème. Pour répondre à cette question, il faut remarquer que l'équation $(x+c)x = ab$, qui renferme les conditions du problème, étant interprétée de la manière la plus simple, nous dit seulement que la distance de O à un point inconnu C, et qui est désignée par x, forme avec cette même distance x, augmentée de c, un rectangle égal à ab, représenté par le produit OB × OA. La solution du problème nous a appris qu'en portant la valeur positive de x, de O en C, et la négative de O en C′, les deux points C et C′ jouissaient de la propriété demandée.

L'idée de la circonférence ACDB n'est donc pas comprise

dans l'équation $(x+c)x = ab$; mais les points A, C, D, B nous rappellent, par la propriété des sécantes extérieures, à la seule vue de la figure, dans quels rapports doivent être les lignes OB, OA, OC, OD, et peignent en quelque sorte, à l'aide de la Géométrie, l'énoncé du problème. La seconde solution nous apprend que si l'on fait $OB' = a$ et $OA' = b$, on doit avoir la proportion

$$OC' : OB' :: OA' : OD';$$

et pour que cette proportion se peigne encore à nos yeux par une figure géométrique, on peut mener un second cercle A'D'C', qui nous la rappelle par la propriété des sécantes extérieures.

153. Ce problème, dans le fond, est le même que le problème second : aussi remarquons-nous que dans le cas de la valeur négative, x et $x+c$, devenant $-x$ et $c-x$, sont représentés par les lignes OC' et OD', égales aux lignes OD et OC, qui étaient les valeurs de $x+c$ et de x, dans le cas de la solution positive.

Problème VIII.

Fig. 60. **154.** *Ayant décrit dans un angle droit* DAL (fig. 60) *les deux arcs qui ont le même centre* A, *partager l'espace* DLBE *en deux parties égales, par un troisième arc concentrique.*

Soient $AL = a$, $AB = b$, $AT = x$: on aura donc

aire DAL — *aire* ZAT = *aire* ZAT — *aire* EAB;

et comme en représentant par $1 : \pi$ (*Note neuvième*) le rapport du diamètre à la circonférence, l'aire du cercle qui est décrit avec un rayon r est toujours exprimée par πr^2 (*); les aires

(*) Il faut remarquer que la circonférence du cercle décrit avec le rayon r, ayant $2r$ pour diamètre, on déterminera cette circonférence

DAL, ZAT, EAB, qui valent le quart des cercles décrits avec des rayons a, x et b, seront donc respectivement

$$\tfrac{1}{4}\pi a^2, \quad \tfrac{1}{4}\pi x^2 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{4}\pi b^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\tfrac{1}{4}\pi a^2 - \tfrac{1}{4}\pi x^2 = \tfrac{1}{4}\pi x^2 - \tfrac{1}{4}\pi b^2;$$

et en supprimant le facteur commun $\frac{1}{4}\pi$, on réduira cette équation à $a^2 - x^2 = x^2 - b^2$; et tirant la valeur de x^2, on aura $x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$; passant à la racine,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

155. Pour construire cette valeur, on joindra les points D et B par une droite DB ; sur cette droite prise pour diamètre, on décrira une demi-circonférence DGB, et partageant cette demi-circonférence en deux parties égales, au point G, la corde DG aura pour expression Fig. 60.

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

En effet, $DB^2 = DA^2 + AB^2 = a^2 + b^2$; d'une autre part, $DB^2 = DG^2 + BG^2 = 2DG^2$; donc

$$DG^2 = \frac{DB^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{et} \quad DG = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

On portera donc cette valeur de A en T et de A en T′, et

---

par la proportion

$$1 : \pi :: 2r : 2\pi r;$$

en multipliant $2\pi r$ par $\frac{1}{2}r$, on aura πr^2 pour l'aire du cercle décrit avec le rayon r.

l'on aura les deux solutions du problème; cette dernière est négative, et détermine l'arc T'Z, qui satisfait aussi au problème, puisque rien dans l'équation n'indique de quel côté doit être situé l'angle DAL.

Problème IX.

156. *Partager un arc en trois parties égales.*

Fig. 61. Soit ADB cet arc (*fig.* 61), le problème se réduit à trouver la corde AD d'un arc qui serait le tiers de ADB. Pour cet effet, imaginons l'arc ADB partagé en trois parties égales AD, DE, EB; menons les rayons CA, CD, CE, CB; soit r l'un de ces rayons, a la corde AB, et x la corde cherchée AD. A cause de l'égalité des arcs AD, EB, la droite AB est parallèle à DE; donc l'angle AFD est égal à l'angle FDE comme alterne interne, et par conséquent à l'angle ADF, puisque le rayon CD partage l'angle ADE en deux parties égales, comme d'ailleurs on peut s'en assurer en remarquant que les triangles CAD, CDE ont leurs trois côtés égaux. Le triangle ADF ayant donc ses angles en D et en F égaux à l'angle CDE, est isocèle et semblable au triangle CDE; donc

$$AF = AD = x;$$

on prouverait de même que

$$GB = EB = x;$$

donc AB, qui équivaut à AF + GB + FG, donnera lieu à l'équation

$$a = 2x + FG. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (116)$$

Pour déterminer FG, cherchons d'abord DF : les triangles semblables CDE, ADF, donnent la proportion

$$CD : DE :: AD : DF,$$

ou

$$r : x :: x : DF;$$

donc

$$DF = \frac{x^2}{r} \quad \text{et} \quad CF = r - \frac{x^2}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r}.$$

Les triangles semblables CDE, CFG donnent cette seconde proportion

$$CD : DE :: CF : FG,$$

ou

$$r : x :: \frac{r^2 - x^2}{r} : FG = \frac{(r^2 - x^2)x}{r^2}.$$

Substituant cette valeur de FG dans l'équation (116), nous aurons

$$a = 2x + \frac{r^2 - x^2}{r^2}x, \quad \text{ou} \quad a = \frac{3r^2x - x^3}{r^2}. \quad \ldots\ldots (117)$$

L'inconnue nous étant donnée par une équation du troisième degré, nous ne donnerons pas la construction qui dépend d'un procédé que nous ne pourrons faire connaître que lorsque nous parlerons de la détermination des racines des équations du troisième degré par l'intersection des courbes.

PROBLÈME X.

157. *Un angle* BAR (fig. 62) *étant donné, couper les lignes qui forment cet angle par une droite menée du point* O, *de telle manière que cette droite intercepte dans l'angle* BAR *une surface triangulaire égale à un carré donné.* Fig. 62.

Quoique nous ne connaissions pas la position de cette ligne qui part du point O, représentons-la par OR (*fig.* 62), et nommons AR, x; MP, y, et c le côté du carré : la surface cherchée sera donc AMR $= \frac{xy}{2}$, et par la condition de l'égalité des surfaces, on aura l'équation Fig. 62.

$$\frac{xy}{2} = c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (118)$$

Cette équation convient à tous les triangles qui peuvent avoir pour surface c^2, et par conséquent est indépendante de la position du point O; et comme de tous ces triangles le seul dont le côté opposé à l'angle A contient le point O dans sa direction, peut résoudre le problème, il faut encore exprimer cette condition : or, la position du point O est déterminée par la perpendiculaire OK et par la ligne AK. Soient donc AK $= a$, OK $= b$; les triangles rectangles semblables RPM, RKO donnent la proportion

$$\text{PR} : \text{PM} :: \text{KR} : \text{KO},$$

ou

$$x - \text{AP} : y :: x + a : b; \ldots\ldots (119)$$

cette proportion suppose bien que la ligne OR passe par le point O, puisque les lignes a et b, d'où dépend la position de

ce point, y sont regardées comme connues; mais tant qu'on ne détermine pas la valeur de AP, l'angle que BA fait avec AR reste arbitraire; et comme cet angle est connu, nous devons avoir la faculté de déterminer convenablement AP; or, si l'on mène une parallèle OC à MA, la ligne CK sera connue, nommons-la d; les triangles semblables CKO, APM donnent la proportion

$$\text{OK} : \text{CK} :: \text{MP} : \text{AP},$$

ou

$$b : d :: y : \text{AP};$$

donc $\text{AP} = \frac{dy}{b}$; au moyen de cette valeur, la proportion (119) deviendra

$$x - \frac{dy}{b} : y :: x + a : b;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, et réduisant, on a

$$bx - dy = xy + ay;$$

substituant dans cette équation la valeur de $y = \frac{2c^2}{x}$ tirée de l'équation (118), on aura

$$bx - \frac{2dc^2}{x} = 2c^2 + \frac{2ac^2}{x};$$

multipliant par x, et divisant en même temps par b, il viendra

$$x^2 - \frac{2dc^2}{b} = \frac{2c^2x}{b} + \frac{2ac^2}{b};$$

faisant passer les x dans le premier membre,

$$x^2 - \frac{2c^2x}{b} = \frac{2dc^2}{b} + \frac{2ac^2}{b},$$

et

$$x^2 - \frac{2c^2x}{b} = 2\,\frac{(d+a)}{b}\,c^2;$$

si l'on observe que la ligne $d + a = \mathrm{CA}$, en nommant e cette ligne, notre équation devient

$$x^2 - \frac{2c^2x}{b} = \frac{2ec^2}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

et donne, en la résolvant,

$$x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{b}\right)^2 + \frac{2ec^2}{b}}.$$

158. Pour construire cette valeur, nous pouvons d'abord la simplifier; car $\frac{c^2}{b}$ étant le quatrième terme de cette proportion $b : c :: c : \frac{c^2}{b}$, se déterminera comme dans l'art. **124**. Nommons donc V cette quatrième proportionnelle, et, la substituant à $\frac{c^2}{b}$ dans l'équation précédente, nous aurons

$$x = \mathrm{V} \pm \sqrt{\mathrm{V}^2 + 2e\mathrm{V}}.$$

Décrivons ensuite, avec un rayon e, un cercle dont le diamètre $2e$ soit prolongé d'une partie égale à V; de l'extrémité de ce prolongement, menons une tangente T au cercle : cette tangente sera la valeur de l'expression radicale; car une tangente étant moyenne proportionnelle entre sa sécante et sa partie extérieure, nous aurons la proportion

$$\mathrm{V} + 2e : \mathrm{T} :: \mathrm{T} : \mathrm{V};$$

égalant le produit des moyens à celui des extrêmes,

$$\mathrm{T}^2 = \mathrm{V}^2 + 2e\mathrm{V};$$

et tirant la racine,

$$\mathrm{T} = \sqrt{\mathrm{V}^2 + 2e\mathrm{V}}.$$

Connaissant V et T, il sera facile de déterminer V + T et V — T pour les deux valeurs de x. On portera V + T de A en R (*fig.* 62), Fig. 62.

et menant la droite OR, le triangle AMR sera la première solution du problème.

Pour avoir l'autre, je remarque que la seconde valeur V — T de x est négative : car il est évident que

$$V^2 + eV > V^2,$$

et, en tirant la racine, on a

$$\sqrt{V^2 + 2eV} > V,$$

c'est-à-dire T > V. On prendra donc l'excès de T sur V, et on le portera de A en R′, et le triangle AM′R′ sera la seconde solution du problème.

159. Ce problème donne deux solutions ; car, si nous examinons les conditions que nous avons exprimées algébriquement, nous verrons qu'elles convenaient au triangle AM′R′, aussi bien qu'au triangle AMR. En effet, l'équation $c^2 = \frac{xy}{2}$ suppose seulement l'égalité d'un carré c^2 à un triangle formé par deux lignes qui, se croisant au point A, viennent rencontrer la ligne menée du point O. Cette équation peut donc appartenir à l'un ou à l'autre des triangles AMR, AM′R′ ; adoptons la seconde hypothèse, et par conséquent représentons x par AR′, et y par M′P′; en comparant les triangles rectangles semblables P′M′R′, KOR′, nous établirons la proportion

$$AR' - AP' : P'M' :: KR' : OK,$$

ou

$$x - \frac{dy}{b} : y :: a - x : b;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, et éliminant y à l'aide de l'équation $\frac{xy}{2} = c^2$, et opérant comme pré-

cédemment, nous trouverons

$$x^2 + \frac{2c^2}{b}x = 2c^2\left(\frac{a+d}{b}\right);$$

et en remplaçant $a + d$ par e, on aura

$$x^2 + \frac{2c^2}{b}x = \frac{2ec^2}{b};$$

cette équation ne diffère que par le signe du second terme de l'équation (120).

Mais comme, en considérant le triangle AM'R', nous avons supposé que les valeurs positives de x devaient être prises dans un autre sens que celui dans lequel nous les comptions précédemment, et que ce sens est absolument arbitraire, nous pouvons de nouveau adopter que les x positifs se comptent de A en R, au lieu de A en R'.

Pour cet effet, il suffit de changer dans notre équation les valeurs positives de x en négatives, et réciproquement : c'est à quoi l'on parviendra toujours en faisant $x = -x$, et l'on aura l'équation

$$x^2 - \frac{2c^2}{b}x = \frac{2c^2e}{b},$$

qui est absolument la même que l'équation (120) que nous avons déduite de la considération du triangle AMR (*Note dixième*).

CHAPITRE II.

De la construction des quantités rationnelles.

160. Les problèmes que nous avons résolus font sentir la nécessité d'avoir des moyens généraux de construire les quantités que donne la solution des problèmes : nous nous occuperons d'abord de celles qui ne renferment point de radicaux, et qui sont comprises sous le nom de *quantités rationnelles*, et nous dirons qu'elles sont d'une, de deux ou de trois dimensions, selon qu'elles représentent des lignes, des surfaces ou des volumes.

Toute expression rationnelle, monôme d'une dimension, doit être comprise dans l'une des suivantes :

$$a,\quad \frac{ab}{c},\quad \frac{abc}{de},\quad \frac{abcd}{efg},\quad \text{etc.}$$

En effet, il suffit d'être convenu de représenter les lignes par des lettres, pour que la lettre a nous rappelle l'idée d'une ligne.

161. Il en doit être de même de $\frac{ab}{c}$; car la proportion $c : a :: b : \frac{ab}{c}$ nous montre que $\frac{ab}{c}$ est une quatrième proportionnelle aux lignes c, a et b.

162. La troisième expression $\frac{abc}{de}$ peut être écrite de cette manière, $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; et si nous représentons par k la quatrième proportionnelle, qui est la valeur de $\frac{ab}{d}$ (art. **161**), on changera $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ en $\frac{kc}{e}$, qui se construit par une quatrième proportionnelle (art. **161**).

163. L'expression $\frac{abcd}{efg}$ se réduira de même à une quatrième proportionnelle; car en l'écrivant ainsi, $\frac{ab}{e} \times \frac{cd}{fg}$, on supposera la ligne représentée par $\frac{ab}{e} = \mathrm{P}$, et l'on aura $\frac{\mathrm{P}cd}{fg}$, qui se construit comme dans l'art. **162**.

164. *Toutes les fractions telles que* $\frac{abc}{d}$, $\frac{abcd}{ef}$, $\frac{abcde}{fgh}$, *etc., dans lesquelles le nombre de lettres du numérateur surpasse de deux celui des lettres du dénominateur, peuvent se construire, en les réduisant à la forme* ab, *par le moyen des quatrièmes proportionnelles.*

Car la première fraction

$$\frac{abc}{d} = \frac{ab}{d} \times c = \mathrm{P}c, \quad \text{en faisant} \quad \frac{ab}{d} = \mathrm{P};$$

la seconde,

$$\frac{abcd}{ef} = \frac{ab}{e} \times \frac{cd}{f} = \mathrm{PQ}, \quad \text{en faisant} \quad \frac{ab}{e} = \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \frac{cd}{f} = \mathrm{Q};$$

la troisième,

$$\frac{abcde}{fgh} = \frac{ab}{f} \times \frac{cde}{gh} = \frac{\mathrm{P}cde}{gh}, \quad \text{en faisant} \quad \frac{ab}{f} = \mathrm{P},$$

et se rapporte à la précédente ; ainsi de suite.

165. Pareillement, *l'expression la plus simple de trois dimensions est abc, et peut représenter le volume d'un parallélipipède rectangle, dans lequel a, b, c, seraient les trois arêtes contiguës.*

C'est à cette forme *abc* que l'on peut réduire, à l'aide des quatrièmes proportionnelles, toutes les fractions, telles que $\frac{abcd}{e}$, $\frac{abcde}{fg}$, dans lesquelles le nombre de lettres du numérateur excède de trois celui des lettres du dénominateur.

166. *Lorsque le nombre de lettres du numérateur est le même que celui des lettres du dénominateur, comme dans les fractions* $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, *ces fractions sont de dimensions nulles, et représentent des nombres :* car $\frac{a}{b}$ exprime le nombre de fois que la ligne *b* est contenue dans la ligne *a*; de même $\frac{ab}{cd}$ représente le nombre de fois que la surface *cd* est renfermée dans la surface *ab*.

167. Ce que nous disons des quantités rationnelles monômes s'applique aux polynômes : soit la fraction

$$\frac{abc+def+ghl}{pq+pr+ps} \quad \text{ou} \quad \frac{abc+def+ghl}{p(q+r+s)};$$

je fais $q+r+s=k$, et je réduis ma fraction à

$$\frac{abc+def+ghl}{pk}=\frac{abc}{pk}+\frac{def}{pk}+\frac{ghl}{pk};$$

et je vois qu'après avoir construit ces fractions, d'après l'art. **162**, j'aurai un assemblage de lignes dont la somme sera la valeur de ma fraction polynôme.

168. Si le dénominateur ne pouvait pas être décomposé en deux facteurs, et qu'on eût $\frac{abc+def+ghl}{pm+qn+rs}$, on supposerait $qn=px$, $rs=py$, x et y étant de nouvelles lignes dont nous apprendrons bientôt à construire les valeurs; et la formule deviendrait

$$\frac{abc+def+ghl}{pm+px+py}=\frac{abc+def+ghl}{p(m+x+y)}=\frac{abc+def+ghl}{pk};$$

en faisant, comme dans le cas précédent, $m+x+y=k$. On construira cette formule par l'art. **162**, dès que l'on connaîtra les valeurs de x et de y.

169. Pour les déterminer, l'équation $qn = px$ me donnera $x = \frac{qn}{p}$, ce qui me fait voir (art. **161**) que x est une quatrième proportionnelle aux lignes p, q, n; la valeur de y se déterminera de même, au moyen de l'équation $rs = py$.

170. Prenons encore la fraction $\frac{abcd + efgh}{mnp + qrs}$. Afin de réduire le dénominateur à un seul produit, on supposera $qr = mx$; alors x se déterminera par le procédé indiqué dans l'article précédent, et le dénominateur se changera en $mnp + mxs$. Faisant ensuite $xs = ny$, il deviendra

$$mnp + mny = mn(p + y) = mnq,$$

en nommant q le facteur $(p + y)$, et notre fraction se trouvera réduite à

$$\frac{abcd + efgh}{mnq} = \frac{abcd}{mnq} + \frac{efgh}{mnq},$$

et sera constructible par l'art. **163**.

171. On voit qu'en général, dans toute fraction polynôme, si l'excès du nombre de lettres d'un terme du numérateur sur celui des lettres d'un terme du dénominateur, est de deux lettres, cette fraction peut se réduire à la forme ab; si cet excès est de trois lettres, la fraction peut se réduire à la forme abc.

172. Nous supposerons que les termes du numérateur renferment chacun le même nombre de lettres, et qu'il en est de même à l'égard du dénominateur, parce que la question qui nous a conduits à une formule n'a pu nous donner un résultat composé de parties hétérogènes, comme des lignes, des surfaces et des volumes : par exemple, si l'on avait $\frac{abcd + dbe}{fg}$, ou plutôt $\frac{abcd}{fg} + \frac{dbe}{fg}$, je vois que $\frac{abcd}{fg}$ représentant une surface, et $\frac{dbe}{fg}$ une ligne, on ne peut avoir une quantité composée d'une surface et d'une ligne.

173. Cependant il se présente une circonstance où une fraction de cette espèce peut subsister : c'est lorsqu'une des lignes qui entrent dans son expression est égale à l'unité. Représentons par n cette ligne : on pourra, au moyen des puissances de n introduites dans les termes du numérateur ou du dénominateur, qui ne contiennent pas la plus haute dimension, rendre apparents les facteurs qui semblent manquer à ces termes.

Par exemple, on changerait la fraction

$$\frac{abcd + dbe + hl}{fg} \text{ en } \frac{abcd + dben + hln^2}{fg}.$$

174. Nous avons vu, dans la Trigonométrie (art. 20), qu'on prenait quelquefois le rayon pour unité, et nous avons indiqué le moyen de passer de cette hypothèse à celle où primitivement le rayon est représenté par r. Le principe de l'homogénéité peut nous conduire au même but; car, lorsqu'on nous donne, par exemple, la formule

$$\frac{a + bc + c^3 + d^4}{ag^2 + ec + b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

on sent que tous les termes du numérateur, à cause de d^4, devaient être primitivement des quatre dimensions, et ne sont devenus tels qu'ils sont que par le changement de r, de r^2, de r^3 en l'unité. L'opération contraire sera donc de remplacer a par ar^3, bc par bcr^2, c^3 par c^3r; appliquant les mêmes considérations au dénominateur, nous rétablirons l'hypothèse primitive du rayon désigné par r, en rendant la formule (121) homogène, et nous écrirons

$$\frac{ar^3 + bcr^2 + c^3r + d^4}{ag^2 + ecr + br^2}.$$

CHAPITRE III.

De la construction des quantités radicales du second degré.

175. Les propriétés du cercle nous donnent les moyens de trouver en lignes les valeurs des quantités radicales du second degré. Parmi ces propriétés, considérons celle d'une perpendiculaire (*fig.* 63) CD sur un diamètre AB. On sait que cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre qu'elle divise, c'est-à-dire qu'en faisant AD $= a$, DB $= b$, CD $= x$, on a la proportion Fig. 63.

$$a : x :: x : b;$$

d'où l'on tire

$$x^2 = ab \quad \text{et} \quad x = \sqrt{ab}.$$

Lors donc que nous aurons une expression radicale à construire, il faudra faire en sorte que ce qui est sous le radical se réduise à la forme ab; et, pour y parvenir, on emploiera le procédé de l'art. 164, ou un de ceux qu'on a donnés lorsqu'on a traité des fractions polynômes. Nous allons appliquer cette construction à quelques exemples.

176. Si l'on se propose de construire $\sqrt{abcd - ghef}$, on fera

$$bc = ax, \quad gh = ay, \quad ef = az,$$

x, y, z, représentant des lignes qu'on déterminera par ces équations, comme dans l'art. **169**, et notre formule deviendra

$$\sqrt{a^2xd - a^2yz} = \sqrt{(xd - yz)a^2} = a\sqrt{xd - yz}.$$

Faisant ensuite

$$yz = xu,$$

on aura $$a\sqrt{xd - xu} = a\sqrt{x(d - u)},$$

et prenant une moyenne proportionnelle entre x et $d - u$, cette moyenne proportionnelle sera la valeur du radical, art. **175**, et le produit se réduira à la forme ab.

177. Si l'on voulait construire encore $\sqrt{\frac{ab^2}{c} - gd}$, on ferait $\frac{b^2}{c} = p$, $gd = ax$, et l'expression radicale se transformerait en

$$\sqrt{ap - ax} = \sqrt{a(p - x)},$$

qui est de la forme $\sqrt{ab}$.

178. Enfin si l'on se proposait de construire $\frac{a\sqrt{b + c}}{\sqrt{d + e}}$ comme toute quantité qui multiplie un radical peut passer sous le signe, étant élevée au carré, on changerait l'expression précédente en

$$\frac{\sqrt{a^2b + a^2c}}{\sqrt{d + e}} = \sqrt{\frac{a^2b + a^2c}{d + e}} = \sqrt{a\frac{ab}{d + e} + a\frac{ac}{d + e}};$$

faisant $$\frac{ab}{d + e} = A, \quad \text{et} \quad \frac{ac}{d + e} = B,$$

nous aurions $$\sqrt{aA + aB} = \sqrt{a(A + B)},$$

valeur qui se construirait en prenant une moyenne proportionnelle (art. **175**) entre a et $A + B$.

179. Les propriétés du carré de l'hypoténuse nous donnent aussi des formules auxquelles on peut rapporter les quantités radicales du second degré ; car (*fig.* 64) on a dans le triangle rectangle BAC,

Fig. 64.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

et, en faisant $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, on aura

$$BC^2 = b^2 + c^2, \quad \text{et} \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Donc, lorsqu'on aura réduit les quantités qui sont sous le radical, à la somme de deux carrés b^2 et c^2, la valeur sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont b et c sont les côtés.

180. L'équation (122) nous donne encore

$$AB^2 = BC^2 - AC^2,$$

ou

$$AB^2 = a^2 - b^2;$$

et en tirant la racine, $AB = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Cette nouvelle formule nous apprend que, si l'on a réduit à la différence de deux carrés la quantité qui est sous le radical, ce radical doit avoir pour valeur un des côtés d'un triangle rectangle, dont l'autre côté serait b, et l'hypoténuse a.

181. Pour en donner un exemple, si j'avais à construire $\sqrt{p^2 - 2rs}$, je ferais $2rs = x^2$, et x se déterminerait en prenant une moyenne proportionnelle entre $2r$ et s; car l'équation précédente donne la proportion

$$2r : x :: x : s;$$

d'où l'on tire

$$2rs = x^2;$$

substituant cette valeur de $2rs$, la quantité radicale devient

$$\sqrt{p^2 - x^2}.$$

182. Par conséquent, si sur $AB = p$ (*fig.* 63), je décris une demi-circonférence, et que je prenne $AC = x$, l'angle ACB sera droit, et CB sera la valeur du radical.

183. On sait qu'il existe plusieurs autres manières que celle que nous avons employée, de prendre une moyenne proportionnelle : on peut, suivant le cas, les faire servir avec avantage dans la construction des formules. Par exemple, si j'avais à construire $\sqrt{a^2 + ab}$, prenant $AD = a$, $DB = b$ (*fig.* 63), je décrirais sur le diamètre $AB = a + b$ une demi-circonférence, et au point de jonction D élevant une perpendiculaire DC, la corde AC serait mon radical; car, cette corde étant moyenne proportionnelle entre AD et AB, comme la Géométrie nous l'apprend, on au- Fig. 63.

rait la proportion

$$AD : AC :: AC : AB,$$

ou

$$a : AC :: AC : a + b;$$

donc

$$AC^2 = a^2 + ab,$$

et tirant la racine,

$$AC = \sqrt{a^2 + ab}.$$

184. Cette autre proposition de la Géométrie, que *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure,* nous fournit aussi les moyens de construire cette même quantité radicale : car ayant décrit (*fig.* 56) le cercle AED avec un rayon $\frac{1}{2}b$, on prolongera le diamètre DE, d'une partie $EB = a$, et du point B on mènera la tangente BA; alors, par la propriété de cette tangente, on aura la proportion

Fig. 56.

$$DB : AB :: AB : EB,$$

ou

$$a + b : AB :: AB : a;$$

donc

$$AB^2 = a^2 + ab, \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{a^2 + ab};$$

par conséquent, AB est la valeur du radical.

185. En général, une construction sera d'autant plus élégante, qu'elle exigera moins de préparations, et qu'elle se fera par une suite d'opérations graphiques liées les unes aux autres sur la même figure.

CHAPITRE IV.

De la construction des équations complètes du second degré à une inconnue.

186. Dans ce qui précède, nous avons construit les formules, après avoir résolu les équations qui les donnent.

Proposons-nous maintenant de construire les deux valeurs d'une inconnue, déterminée par une équation du second degré, sans avoir besoin de résoudre cette équation.

187. Pour cet effet, rendons positif le terme en x^2 de cette équation, et faisons passer tous les autres dans le membre qui ne contient pas ce terme; quels que soient les signes qui affectent ces différents termes,

nous ne pourrons avoir que l'une de ces quatre combinaisons :

$$x^2 = px - q, \quad \text{ou} \quad x^2 - px + q = 0, \ldots \quad (123)$$

$$x^2 = -px - q, \quad \text{ou} \quad x^2 + px + q = 0, \ldots \quad (124)$$

$$x^2 = -px + q, \quad \text{ou} \quad x^2 + px - q = 0, \ldots \quad (125)$$

$$x^2 = px + q, \quad \text{ou} \quad x^2 - px - q = 0. \ldots \quad (126)$$

188. Pour construire les racines de l'équation (123), décrivons (*fig.* 65) sur le diamètre $AB = p$ une demi-circonférence; à l'extrémité de ce diamètre, élevons une perpendiculaire $AL = \sqrt{q}$, et menons LC parallèle au diamètre AB. Il est évident que les perpendiculaires MP, M'P', vaudront $AL = \sqrt{q}$. Or, toute perpendiculaire sur un diamètre étant moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre qu'elle sépare, si l'on nomme AP, x; PB sera $p - x$, et l'on aura la proportion

$$AP : PM :: PM : PB,$$

ou

$$x : \sqrt{q} :: \sqrt{q} : p - x;$$

d'où l'on tire

$$px - x^2 = q, \quad \text{ou} \quad x^2 - px + q = 0.$$

Donc l'une des racines de cette équation est AP; et comme l'on aurait été conduit à la même équation en prenant, pour x, AP' au lieu de AP, l'autre racine sera AP' (*).

189. En résolvant l'équation (123), on trouve

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Lorsqu'on a $\frac{1}{4}p^2 < q$, ou $\frac{1}{2}p < \sqrt{q}$, la partie radicale de la valeur de x devient imaginaire, et par conséquent il est impossible que x, dans ce cas, ait aucune valeur réelle, ce qui est d'ailleurs évident; car il faudrait que la perpendiculaire $\sqrt{q}$ ou PM surpassât le rayon $\frac{1}{2}p$.

190. L'équation (124) étant résolue, on voit que ses racines sont négatives et égales à celles de l'équation (123) prises négativement;

(*) En faisant $AP' = x$, on trouverait $P'B = p - x$; et puisque l'ordonnée $P' = \sqrt{q}$ est moyenne proportionnelle entre AP' et P'B, on aurait $x : \sqrt{q} :: \sqrt{q} : p - x$, ce qui donnerait $q = px - x^2$.

ainsi, au moyen d'un changement de signe, les racines AP et AP′ de l'équation (123), en changeant les signes, donnent — AP et — AP′ pour celles de l'équation (124).

191. L'une des racines de l'équation (125) peut se construire de la manière suivante : Décrivez avec un rayon $= \frac{1}{2}p$ la demi-circonférence AMB (*fig.* 66); menez à cette demi-circonférence une tangente $MT = \sqrt{q}$; nommant x la partie AT du diamètre prolongé jusqu'à la rencontre T de la tangente, la propriété de cette tangente donne la proportion

$$TA : TM :: TM : TB,$$

ou

$$x : \sqrt{q} :: \sqrt{q} : x + p;$$

d'où l'on tire

$$x^2 + px = q, \quad \text{ou} \quad x^2 + px - q = 0.$$

192. Cette seule racine TA, étant connue, fera trouver l'autre; car, en résolvant l'équation (125), et en nommant x' et x'' les deux valeurs de x, si on les ajoute ensemble, on trouvera

$$x' + x'' = -p \quad (*);$$

et en faisant passer l'un des termes du premier membre dans le second, on conclura que *l'une des racines est égale à l'autre prise en signe contraire, et diminuée de p*. Donc, TA étant une racine de l'équation (125), l'autre sera

$$-TA - p = -(TA + p) = -(TA + AB) = -TB.$$

193. Enfin, si l'on résout les équations (125) et (126), on reconnaîtra, comme dans l'art. **190**, que les racines de l'équation (125) sont les mêmes que celles de l'équation (126) prises avec des signes contraires, et peuvent être représentées par — TA et par + TB.

(*) On sait, par la théorie des équations, que le coefficient p, pris négativement, est égal à la somme des racines de l'équation

$$x^2 + px - q = 0.$$

CHAPITRE V.

De l'équation à deux indéterminées, en général, et de quelle manière elle donne naissance à une ligne, droite ou courbe, qu'on nomme le lieu de l'équation.

194. Lorsque, entre deux indéterminées x et y, on n'a qu'une seule équation, la valeur de l'une des inconnues ne peut s'obtenir qu'après en avoir assigné une arbitrairement à l'autre.

Par exemple, si l'on a l'équation

$$\frac{(x-1)^2}{x-\sqrt{y-2}} - x = \sqrt{y-2},$$

on peut la ramener à cette forme (*)

$$y = 2x + 1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

faisant successivement

$x = 0,$	on trouve	$y = 1;$
$x = 1,$		$y = 3;$
$x = 2,$		$y = 5;$
$x = 3,$		$y = 7;$
etc.		etc. (**);

(*) C'est ce qu'il est facile d'obtenir en chassant le dénominateur; car le second membre devient alors $(x+\sqrt{y-2})(x-\sqrt{y-2})$, et se réduit à $x^2-(y-2)$, par la même raison que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, il ne s'agira plus que de développer le premier membre, et d'effacer les termes qui se détruisent.

(**) On pourrait bien donner des valeurs positives à y, pour déterminer celles de x; mais le système de solutions serait le même : nous avons trouvé, par exemple, que $x=2$ donnait $y=5$; en faisant arbitrairement $y=5$, on trouverait $x=2$.

de sorte que, pour chaque solution, il y a toujours une valeur de x et une valeur de y qui doivent se correspondre.

195. Examinons comment on a pu représenter par une figure cet assemblage de solutions.

Fig. 67. On a imaginé deux droites indéfinies, AX, AY (*fig.* 67), formant entre elles un angle arbitraire, que, pour plus de simplicité, nous supposerons droit. On a donné à AX le nom d'*axe des abscisses*, et à AY le nom d'*axe des ordonnées*.

196. Lorsqu'on veut construire une solution, par exemple, celle où $x = 2$ et $y = 5$, on prend sur l'axe des abscisses une ligne AP $= 2$, et menant à son extrémité P une ligne PM $= 5$, parallèlement à l'axe des ordonnées, le système des lignes AP et PM donne la solution.

Soit encore pris $x =$ AQ $= 1$; d'après le tableau de l'art. **194**, y vaudra 3. L'on mènera donc par le point Q une parallèle QN à l'axe des ordonnées, et AQ et QN seront la solution du cas où $x = 1$ et $y = 3$.

Chaque solution détermine la position d'un point dans la figure : ainsi, dans nos deux exemples, nous avons déterminé les points M et N; le premier au moyen des lignes AP et PM, le second au moyen des lignes AQ et QN.

197. On a donné en général au système des deux lignes qui déterminent un point, le nom de *coordonnées :* ainsi AP et PM sont les coordonnées du point M, et AQ et QN sont les coordonnées du point N.

Mais quand les coordonnées ne sont pas dénommées ensemble, celle qui suit la direction de l'axe des abscisses prend le nom d'*abscisse*, et celle qui est menée parallèlement à l'axe des ordonnées prend le nom d'*ordonnée :* ainsi, dans nos exemples, AP et AQ sont deux abscisses, et PM et QN sont deux ordonnées.

198. Toute abscisse étant comprise entre le pied de son

ordonnée et le point A, ce point, pour cette raison, porte le nom d'*origine*.

199. Ayant donc construit (*fig.* 68) les valeurs données par l'équation 127, Fig. 68.

en prenant les abscisses 0 *et les ordonnées* AR $= 1$,

AP $= 1$, ... PM $= 3$,

AP′ $= 2$, ... P′M′ $= 5$,

AP″ $= 3$, ... P″M″ $= 7$,

etc., etc.,

on déterminera une suite de points R, M, M′, M″, tous assujettis à une même loi, puisqu'ils n'ont pas été pris arbitrairement.

200. Ce petit nombre de solutions n'est rien en comparaison du nombre infini de solutions que donne notre équation, même en se bornant à des abscisses moindres que AP″. Par exemple, si l'on substitue successivement dans notre équation,

les valeurs fractionnaires $x = \frac{1}{2}$, *on trouvera* $y = 2$,

$x = 1\frac{1}{2}$, ... $y = 4$,

$x = 2\frac{1}{2}$, ... $y = 6$.

Ainsi, en prenant (*fig.* 68)

les abscisses A$q = \frac{1}{2}$, *on fera les ordonnées* $qn = 2$,

A$q' = 1\frac{1}{2}$, ... $q'n' = 4$,

A$q'' = 2\frac{1}{2}$, ... $q''n'' = 6$,

et les points R, n, M, n', M′, n'', M″, se rapprocheront encore davantage.

201. On pourrait aussi avoir des abscisses et des ordonnées négatives : par exemple, l'abscisse négative Ar (*fig.* 69), qui correspond à l'ordonnée positive rs, détermine le point s; de même que l'abscisse négative At, qui correspond à l'ordonnée négative tu, détermine le point u.

202. Nous venons de voir que les points trouvés à l'aide des coordonnées se rapprochent d'autant plus que les abscisses

diffèrent moins entre elles ; mais comment assigner la limite du rapprochement de ces points? Pour lever cette difficulté, *je vais démontrer que le système général de tous les points déterminés au moyen de l'équation* $y = 2x + 1$, *en donnant successivement à* x *toutes les valeurs possibles, est une ligne continue.*

Si le système de tous ces points ne formait pas une ligne continue, cela ne pourrait arriver que de deux manières : ou il
Fig. 70. existerait des abscisses, telles que AP (*fig.* 70), qui seraient sans ordonnées correspondantes, ce qui ne peut être, parce que nous savons que toute valeur donnée à x en détermine une
Fig. 71. pour y ; ou il arriverait (*fig.* 71) que deux ordonnées consécutives, telles que PM et P′M′, différant d'une quantité sensible MM′, il y aurait une interruption dans le cours de la courbe entre les points M et M′, ce qui ne peut être encore. En effet, d'après la nature de l'équation, toute valeur donnée à y étant admissible, une valeur au-dessus de PM, et moindre que P′M′, ne pourrait se porter ailleurs qu'à l'extrémité P de AP, parce que les ordonnées vont toujours en croissant dans le même sens. On déterminerait donc un point dans l'intervalle MM′; mais cela est contre cette seconde hypothèse. Il suit de ce qui précède, que le système des points déterminés par les coordonnées de l'équation $y = 2x + 1$, donne naissance à une ligne continue, que nous reconnaîtrons bientôt être une ligne droite.

203. Cette démonstration peut s'appliquer à toutes les autres équations; et, lorsque la ligne n'est continue qu'entre certaines limites, il ne s'agit que de prouver seulement, comme nous le verrons (art. **258**) lorsque nous parlerons des branches des courbes, la continuité des parties qui sont comprises entre ces limites.

204. La ligne que l'on vient de déterminer, art. **202**, au moyen des coordonnées, est ce que l'on appelle le *lieu* de l'équation, qui sera une ligne droite ou courbe, suivant le degré de cette équation.

205. La ligne qui est le lieu d'une équation jouit donc de la propriété, que chaque point qu'elle renferme nous présente dans ses coordonnées les valeurs de x et de y qui doivent être une solution de l'équation.

CHAPITRE VI.

De l'équation de la ligne droite.

206. L'équation du premier degré à deux inconnues, dans toute sa généralité, est $My = Nx + P$; divisant par M, elle devient

$$y = \frac{N}{M}x + \frac{P}{M};$$

et en faisant $\frac{N}{M} = a$, $\frac{P}{M} = b$, cette équation se réduit à

$$y = ax + b,$$

dans laquelle a et b peuvent représenter des quantités positives, négatives ou nulles. Nous examinerons successivement tous ces cas. Supposons d'abord $b = 0$ et a positif, nous aurons l'équation

$$y = ax,$$

qui, réduite en proportion, donne

$$x : y :: 1 : a.$$

Donc, la ligne qui est le lieu de cette équation doit avoir cette propriété, que toujours l'abscisse soit à l'ordonnée dans le rapport constant de 1 à a. Pour savoir ce que signifie cette constante a, je fais $x = 1$, et l'équation $y = ax$ devient $y = a$; donc *la constante a est l'ordonnée qui correspond à* $x = 1$.

207. Ayant adopté le point A (*fig.* 72) pour origine, et AX pour axe des abscisses, si je prends une abscisse AI égale à l'unité linéaire, et que j'élève une perpendiculaire IG sur son Fig. 72.

Fig. 72. extrémité I, la ligne droite AC, qui passe par l'origine et par le point G, sera le lieu de l'équation $y = ax$; car, de l'un des points M de cette ligne abaissant arbitrairement la perpendiculaire MP, et nommant AP, x, et PM, y, les triangles rectangles semblables APM, AIG, donneront la proportion

$$\text{AI} : \text{IG} :: \text{AP} : \text{PM},$$

ou

$$1 : a :: x : y;$$

d'où l'on tire $y = ax$, *équation d'une droite qui passe par l'origine.*

208. Les géomètres disent que a est la tangente trigonométrique de l'angle MAP, que notre droite fait avec l'axe des abscisses. En effet, le rayon des tables étant pris pour unité, si l'on compare le triangle AGI à un triangle semblable construit avec le rayon des tables, on aura la proportion

$$\text{AI} : \text{IG} :: \textit{rayon} : \textit{tangente des tables},$$

ou

$$1 : a :: 1 : \textit{tangente}\ \text{GAI};$$

donc tangente GAI $= a$.

209. Lorsque la ligne droite ne passe pas par l'origine, elle
Fig. 73. doit rencontrer (*fig.* 73) l'axe AY ou son prolongement AY′, si elle n'est pas perpendiculaire à l'axe des x. Examinons le premier cas.

Soient donc AP et PM les coordonnées x et y d'un point M pris arbitrairement sur une droite BC qui coupe l'axe des ordonnées au point B; menons, par l'origine A, la droite AD parallèle à BC; il est évident que

$$\text{PM ou } y = \text{PD} + \text{DM}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

La partie PD de cette équation peut être considérée comme l'ordonnée qui, dans l'équation de la ligne AD, répondrait à $x = \text{AP}$.

Pour déterminer cette équation, la droite AD passant par

l'origine, il suffit (art. 208) d'avoir la tangente trigonométrique de l'angle DAX; or, la ligne AD étant parallèle à BC, l'angle DAX qu'elle forme avec l'axe des abscisses est égal à l'angle CEX que notre droite BC forme avec le même axe. Nommons a la tangente trigonométrique de ce dernier angle; a sera donc aussi la tangente trigonométrique de l'angle DAX. D'où il suit que la droite AD a pour équation (art. 207) $y = ax$; l'ordonnée y de cette équation devenant PD, lorsqu'on prend $x =$ AP, on aura donc

$$\text{PD} = ax.$$

Le parallélisme des mêmes droites BC et AD prouve encore que DM = AB. Nommons b cette partie AB de l'axe des ordonnées, interceptée par notre droite, et substituons dans l'équation (128) les valeurs que nous venons de trouver pour PD et pour DM; nous aurons enfin

$$y = ax + b,$$ *équation de la droite qui coupe l'axe des ordonnées et fait un angle aigu avec cet axe.*

210. Mais si la droite qui coupe en B l'axe des ordonnées, au lieu de faire avec cet axe un angle aigu YBC (*fig.* 73), fait un angle obtus YBC (*fig.* 74), soient AP $= x$, PM $= y$, les coordonnées du point M de la droite BC, nous avons évidemment Fig. 73. Fig. 74.

$$y = \text{AB} - \text{BQ}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

Les signes des termes qui entrent dans cette équation ayant été déterminés d'après l'inspection de la figure, il ne s'agira que de substituer à AB et à BQ les valeurs absolues dont ces termes tiennent la place. Or, si nous désignons par b la constante AB et par a la tangente trigonométrique de l'angle aigu, supplément de l'angle BCX que notre droite fait avec l'axe des abscisses, en comparant le triangle BMQ à celui des tables, on aura la proportion

$$1 : a :: \text{QM} : \text{BQ},$$

ou $$1 : a :: x : BQ;$$

donc $$BQ = ax;$$

au moyen des valeurs de AB et de BQ, l'équation (129) devient

$$y = b - ax,$$ *équation de la droite*

Fig. 74. BC (*fig.* 74) *qui coupe l'axe des ordonnées et fait un angle obtus* YBC *avec cet axe.*

Fig. 75. **211.** Si la droite BC (*fig.* 75) coupe le prolongement de l'axe des ordonnées en un point B et forme un angle aigu ABC avec ce prolongement, et qu'on mène la parallèle AD à BC, on aura

$$PM \text{ ou } y = PD - DM; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

et comme dans l'équation (130) nous avons égard aux signes, on n'a besoin que de trouver les valeurs absolues des quantités qui entrent dans cette équation. Nommons donc b la partie AB prolongée de l'axe des ordonnées jusqu'à la rencontre de la droite BC, les parallèles comprises entre parallèles étant égales, $DM = AB = b$. D'une autre part, soit a la tangente trigonométrique de l'angle CEX que notre droite fait avec l'axe des abscisses, l'angle DAX formé par la parallèle AD comportera la même tangente; et, parce que AD passe par l'origine, l'abscisse $x = AP$ correspondra (art. **207**) à l'ordonnée $PD = ax$. Substituant ces valeurs de PD et de DM, dans l'équation (130), on trouvera

$$y = ax - b,$$ *équation de la droite qui, coupant le prolongement de l'axe des y, fait un angle aigu avec ce prolongement.*

212. Enfin, si la droite BC (*fig.* 76), qui coupe le prolongement de l'axe des ordonnées, fait un angle obtus ABC avec ce prolongement, soient toujours $AP = x$, $PM = y$ les coordonnées d'un point M pris sur cette droite, puisque y tombe

au-dessous de l'axe des x, et par conséquent en sens contraire de celui des ordonnées que nous sommes convenus de regarder comme positives dans l'angle YAX, on a donc

$$y = -\mathrm{PM} = -(\mathrm{PD} + \mathrm{DM}) = -(\mathrm{PD} + \mathrm{AB}). \quad (131)$$

Représentons par b la valeur absolue de AB, et désignons par a la tangente trigonométrique de l'angle aigu, supplément de l'angle obtus que fait la droite BE avec l'axe des abscisses; nous déterminerons PD par la proportion

$$1 : a :: x : \mathrm{PD},$$

ce qui me donnera

$$\mathrm{PD} = ax.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (131), j'aurai

$$y = -(ax + b),$$

ou $y = -ax - b$, *équation de la ligne qui forme un angle obtus avec le prolongement de l'axe des ordonnées et coupe ce prolongement.*

213. Dans ces diverses équations de la ligne droite, trouvées art. **210**, **211** et **212**, nous avons recommencé la démonstration toutes les fois que cette ligne prend une nouvelle position. Il est bien préférable de déduire d'une seule équation tous ces cas différents, en changeant convenablement les signes de l'algèbre à mesure que notre ligne varie de position.

Ainsi, lorsque la droite BC, au lieu de former un angle aigu YBC (*fig.* 73) avec l'axe des ordonnées, en formera un obtus (*fig.* 74), la tangente trigonométrique a étant négative, l'équation $y = ax + b$ sera, comme dans l'art. **210**, Fig. 73. Fig. 74.

$$y = -ax + b;$$

214. Si au contraire la droite EC (*fig.* 73), en changeant de position, rencontrait l'axe des ordonnées sur son prolongement (*fig.* 75), la constante AB représentée par b deviendrait Fig. 73. Fig. 75.

négative, et l'on aurait, comme dans l'art. **211**,

$$y = ax - b;$$

mais si la droite BC (*fig.* 76) rencontrait l'axe des y sur son prolongement et formait un angle obtus YBC avec cet axe, les deux termes du second membre de l'équation $y = ax + b$ changeraient à la fois de signes et l'on aurait, comme dans l'art. **212**,

$$y = -ax - b,$$ *équation de la ligne droite qui forme un angle obtus avec la direction de l'axe des abscisses, et coupe son prolongement.*

215. Lorsque $x = 0$, l'équation $y = ax + b$ se réduit à $y = b$ et ne
Fig. 73. détermine plus que le point B (*fig.* 73) à l'aide de la seule ordonnée AB; mais si, au contraire, c'est a qui est nul, sans que x le soit, l'équation $y = ax + b$ se réduit également à $y = b$. Dans ce cas, y conservant toujours sa valeur constante b, quelle que soit celle de x, on voit que BC est alors parallèle à l'axe des x.

Si a est, au contraire, la tangente d'un angle droit, la cotangente de cet angle est nulle; d'où il résulte que CB se confond avec l'ordonnée et que x n'a plus qu'une seule valeur, celle que détermine le pied de cette ordonnée, tandis que y reste quelconque.

216. Il résulte de ce qui précède que, pourvu qu'on regarde les constantes a et b de l'équation $y = ax + b$ comme susceptibles de pouvoir représenter des quantités positives, négatives ou nulles, les équations de toutes les lignes droites (suivant le cas) rentrent dans celle-ci, quelles que soient les positions de ces lignes; c'est pourquoi on dit que l'équation de la ligne droite est

$$y = ax + b. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

217. La position d'un point étant fixée, lorsqu'on connaît les valeurs α et β des coordonnées x et y de ce point, c'est-à-dire lorsqu'on a les équations $x = \alpha$, $y = \beta$, on a donné à ces équations le nom d'*équations du point.*

218. On pourrait donner plus de symétrie à l'équation de la ligne
Fig. 77. droite de la manière suivante. Soient (*fig.* 77) a et b les distances OA et OB de l'origine aux points A et B où la droite rencontre les axes des

x et des y; si l'on désigne par OP et par PM les coordonnées x et y, les triangles semblables APM, AOB, donnent la proportion

$$AP : PM :: AO : OB,$$

ou $$a - x : y :: a : b;$$

d'où l'on tire $$ab - bx = ay,$$

et par conséquent $$ay + bx = ab; \quad (*) \ldots\ldots\ldots (133)$$

mais dans l'usage l'équation $y = ax + b$, par sa simplicité, est préférable. Au reste, on voit qu'elles rentrent l'une dans l'autre; car on tire de l'équation (133)

$$y = b - \frac{bx}{a},$$

et en faisant la ligne a négative, c'est-à-dire en prenant $a = OA'$ (*fig.* 77), au lieu de supposer $a = OA$ (*fig.* 79), on trouve Fig. 77. Fig. 79.

$$y = \frac{b}{a}x + b,$$

pour l'équation de la droite, qui, passant par le point B et par l'extrémité A' de l'abscisse OA', prend la position A'B (*fig.* 77), et l'on voit que $\frac{b}{a}$ n'est autre chose que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la droite AB avec la direction des x. Fig. 77.

CHAPITRE VII.

De l'équation de la ligne droite assujettie à passer par des points donnés.

219. Jusqu'à présent, la position de notre droite a été fixée par les constantes a et b. La première détermine l'angle que

---

(*) Il est à observer que la constante a de l'équation (133) ne représente pas la même quantité que la constante a de l'équation (132); car nous savons que cette dernière est la tangente trigonométrique qui correspond au rayon 1, et par conséquent doit être de dimension nulle; tandis que la constante a, dans l'équation (133), est une ligne droite.

fait la droite avec l'axe des abscisses; et la seconde détermine le point d'intersection de l'axe des ordonnées par cette droite, ou, ce qui revient au même, détermine le point qui a pour coordonnées o et b. Il est bien évident que la position de cette droite a dû être fixée, dès qu'on a donné un angle et un point connu par ses coordonnées.

220. En généralisant cette idée, au lieu de donner le point sur l'axe des ordonnées, on peut le prendre en un endroit quelconque, et trouver l'équation de la droite qui, passant par ce point, fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est a.

Soient α et β les coordonnées de ce point : quoiqu'on ignore encore l'équation de cette droite, sa position étant fixée par ces deux conditions, et ne supposant pas que la tangente a de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses soit infinie, cas où cet angle est droit, et par conséquent où cette ligne est parallèle à l'axe des ordonnées, on conçoit que la direction de cette ligne doit rencontrer celle de l'axe des ordonnées. Nommons b la distance inconnue de l'origine au point où notre droite coupe la direction de l'axe des ordonnées : cette droite aura donc pour équation (art. 216)

$$y = ax + b$$

Et puisque le point (*) α, β est sur la droite, dès qu'on donnera à x la valeur particulière α, y sera β; par conséquent, notre équation deviendra

$$\beta = a\alpha + b;$$

d'où l'on tire $$b = \beta - a\alpha.$$

(*) Pour plus de brièveté, nous appellerons à l'avenir α, β le point dont les coordonnées sont α et β.

Substituant la valeur de cette constante dans l'équation $y = ax + b$, on a

$$y = ax - a\alpha + \beta.$$

Faisant passer β dans le premier membre, et mettant entre parenthèses ce qui est multiplié par a dans le second, on obtient

$$y - \beta = a(x - \alpha), \quad . \quad . \quad . (134)$$ *équation de la ligne assujettie à passer par un point* α, β.

221. Lorsqu'une ligne est assujettie à passer par deux points, on sent que sa position est fixée. Représentons toujours l'équation de cette ligne par $y = ax + b$, et cherchons à déterminer les valeurs des constantes a et b, au moyen des coordonnées des points connus.

Soient α, β les coordonnées de l'un de ces points; α', β' les coordonnées de l'autre :

Ces points étant par hypothèse sur la droite, dont l'équation est $y = ax + b$, donneront lieu aux équations

$$\left.\begin{aligned} \beta &= a\alpha + b, \\ \beta' &= a\alpha' + b. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Retranchant la première des équations (135) de la seconde, et tirant la valeur de a de la nouvelle équation, on trouvera

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}.$$

Pour avoir la valeur de b, on multipliera la première des équations (135) par α', la seconde par α; et, retranchant l'une de l'autre, il viendra

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = b\alpha' - b\alpha,$$

d'où l'on tirera $$b = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}.$$

Les valeurs de a et de b étant substituées dans l'équation $y = ax + b$, on obtiendra

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

pour l'équation demandée.

222. Pour parvenir à une équation beaucoup plus simple, on observera que, dans l'équation (134) d'une ligne assujettie à passer par un point, la constante a est arbitraire; mais lorsque la ligne doit passer par deux points, l'angle déterminé par cette constante cesse de l'être. Et, en effet, la valeur de a s'est offerte à nous en fonction des coordonnées de nos deux points, lorsque nous avons trouvé (art. **221**) l'équation $a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$. Si l'on substitue donc cette valeur dans l'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$, on assujettira la droite à faire l'angle nécessaire pour qu'elle passe par le point α', β', et l'on aura

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha), \quad . \quad . \quad (137)$$ *équation de la ligne assujettie à passer par deux points.*

Cette équation rentre dans l'équation (134), en remplaçant le coefficient de $x - \alpha$ par a.

223. L'équation (137) est symétrique par rapport à l'un et à l'autre point, c'est-à-dire que les coordonnées α', β' n'y entrent pas d'une manière différente que les coordonnées α, β. En effet, si l'on retranche $\beta' - \beta$ de chacun des membres de l'équation (137), pour que le premier se réduise à $y - \beta'$, notre équation deviendra

$$y - \beta' = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha) - (\beta' - \beta).$$

Développant le second membre, le réduisant ensuite au même dénominateur, et supprimant les termes qui se détruisent,

$$y - \beta' = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x - \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \alpha' = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} (x - \alpha').$$

Multipliant par -1 les deux termes de la fraction $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$, ce qui revient à en changer les signes, on obtient

$$y - \beta' = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} (x - \alpha'),$$

équation qui est la même que l'équation (137), dans laquelle on changerait α en α', α' en α, β en β', et β' en β. Ainsi, *quelle que soit la position des points donnés, on peut prendre arbitrairement l'un de ces points pour* α, β; *l'autre sera nécessairement* α', β'.

224. Les équations assujetties à passer par un et par deux points peuvent aussi se déduire immédiatement des considérations géométriques, de la manière suivante :

Pour obtenir la première, soit une droite (*fig.* 78) CD formant un angle DCE, avec la direction de l'axe des abscisses, dont la tangente est a. Fig. 78.

Nommons α et β les coordonnées AB, BC d'un point donné C sur cette droite; et x, y les coordonnées AP, PM d'un point quelconque M de cette droite; en comparant le triangle rectangle CQM à celui des tables qui a l'unité pour côté homologue à CQ, nous aurons la proportion

$$1 : a :: \text{CQ} : \text{QM},$$

ou

$$1 : a :: x - \alpha : y - \beta;$$

donc

$$y - \beta = a(x - \alpha),$$

et l'on reconnaît ici l'équation (134) de la droite assujettie à passer par un point α, β.

Fig. 78. **225.** Si l'on nomme ensuite (*fig.* 78) α' et β' les coordonnées AL LD, d'un autre point D, on pourra établir la proportion

$$1 : a :: \text{CE} : \text{DE},$$

ou

$$1 : a :: \alpha' - \alpha : \beta' - \beta;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha);$$

cette équation rentre dans l'équation (137) de la droite assujettie à passer par deux points.

Fig. 79. **226.** Si la droite CD (*fig.* 79), en tournant autour du point C, prenait la position CD (*fig.* 79), l'angle ayant toujours son ouverture à droite, comme dans la *figure* 78, serait obtus et représenté par DCE; l'angle DCE', qui en est le supplément, aurait la même tangente a, et en désignant par α et β les coordonnées du point C, nous pourrions établir la proportion

$$1 : a :: \text{CQ} : \text{QM},$$

ou

$$1 : a :: \alpha - x : y - \beta;$$

d'où l'on tirerait

$$y - \beta = a(\alpha - x),$$

ou

$$y - \beta = -a(x - \alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

227. Enfin, si un autre point D était donné par les coordonnées α', β', en comparant le triangle DCE' à celui des tables, on aurait la proportion

$$1 : a :: \text{CE}' : \text{DE}',$$

ou $$1 : a :: \alpha - \alpha' : \beta' - \beta,$$

ou encore $$1 : a :: -(\alpha' - \alpha) : \beta' - \beta;$$

d'où l'on tire $$a = -\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha},$$

et, en changeant les signes des deux membres,

$$-a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (138), on a

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

228. Cette équation étant la même que l'équation (137) (art. 222), que nous avons trouvée, pour une droite qui fait un angle aigu avec l'axe des abscisses, on peut conclure qu'elle a lieu pour un angle aigu comme pour un angle obtus (*).

229. On donnera la même généralité à l'équation

$$y - \beta = a(x - \alpha),$$

en adoptant tacitement que a puisse représenter une quantité positive dans le premier cas, et une négative dans le second.

230. Lorsque, dans cette dernière équation, on fait $\alpha = 0$, $\beta = b$, elle devient $y - b = ax$, ou plutôt $y = ax + b$, qui est l'équation (132) de la ligne droite.

(*) Ce qui distingue ces cas l'un de l'autre, c'est le coefficient de $x - \alpha$ qui est positif ou négatif, selon que la partie positive des différences $\beta' - \beta$ et $\alpha' - \alpha$ l'emportera sur la négative ou en sera surpassée. Soient donc (*fig.* 81) $OP = \alpha$, $PM = \beta$; si les coordonnées du point N sont α' et β', on a

$\beta' - \beta = NQ - PM$, *différ. posit.*; $\alpha' - \alpha = OQ - OP$, *différ. posit.*;

et si les coordonnées de N′ sont α' et β', on a, parce que OP surpasse OQ′,

$\beta' - \beta = N'Q - PM$, *différ. posit.*; $\alpha' - \alpha = -(OQ' - OP)$, *différ. nég.*

Dans cette seconde hypothèse, $\alpha' - \alpha$ rendra négatif le coefficient de $x - \alpha$, tandis que, dans la première, les deux termes de la fraction étant positifs, rendront le coefficient de $x - \alpha$ aussi positif.

CHAPITRE VIII.

De l'équation de la perpendiculaire et de celle de la parallèle à une droite dont l'équation est donnée.

231. On a vu (art. **221**) que la ligne assujettie à passer par un point α, β, pouvait passer par un second point α', β', lorsqu'on disposait de a convenablement : on peut déterminer a par toute autre condition.

232. Proposons-nous de *trouver l'équation d'une droite* BC (fig. 80) *assujettie à passer par un point donné* M, *et perpendiculaire à la droite* DC *qui a pour équation*

Fig. 80.

$$y = ax + b.$$

Soient α et β les coordonnées AH et HM du point M, et a' la valeur absolue de la tangente trigonométrique de l'angle CBX que cette perpendiculaire fait avec l'axe des abscisses : cet angle, dans le cas de l'équation générale que nous venons de donner, est nécessairement obtus, parce qu'il vaut la somme des angles DCB et CDB, dont l'un DCB est supposé droit. L'équation de la droite CB, qui passe par le point α, β, sera donc (art. **226**),

$$y - \beta = - a' (x - \alpha).$$

Rien ne distingue encore cette équation de celles qu'on obtient en général pour toutes les droites qui, passant par le point α, β, forment un angle obtus avec l'axe des abscisses. Mais nous remarquerons que a' étant aussi la tangente de l'angle CBD, supplément de CBX, et CBD étant ce qui manque à l'angle CDB pour faire un angle droit, il en résulte que tangente CBD = cotangente CDB. Or, entre la tangente et la cotangente, il existe (art. **18**) cette proportion :

$$\text{tang} : 1 :: 1 : \text{cot},$$

donc
$$a : 1 :: 1 : a';$$
d'où l'on tire
$$a' = \frac{1}{a}.$$
Substituant cette valeur dans notre équation, nous aurons
$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha), \quad . \ (139)$$ *équation d'une droite qui est perpendiculaire à la ligne dont l'équation est* $y = ax + b$, *et qui passe par un point donné* α, β. (*Note onzième.*)

233. Si, dans l'équation
$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha),$$
nous faisons $\beta = b$ et $\alpha = 0$, nous trouverons
$$y - b = -\frac{x}{a}, \quad \text{ou} \quad y = -\frac{x}{a} + b,$$
pour l'équation de la perpendiculaire ES (*fig.* 82) sur la ligne DE, au point E où cette droite DE coupe l'axe AY des ordonnées. Fig. 82.

234. Lorsqu'on mène une parallèle à la droite dont l'équation est $y = ax + b$, cette parallèle, formant nécessairement le même angle avec l'axe des abscisses, doit avoir pour coefficient de x dans son équation la même tangente trigonométrique, c'est-à-dire, qu'en représentant l'équation de la parallèle par $y = a'x + b'$, il faut que $a = a'$. Il n'en est pas de même des constantes b et b'; car, si elles étaient égales, les deux lignes couperaient l'axe des abscisses au même point, et, comme $a = a'$, elles prendraient la même direction et se confondraient, ce que l'on ne suppose pas, puisqu'on distingue ces parallèles l'une de l'autre.

CHAPITRE IX.

De l'expression de la distance de deux points.

235. Les coordonnées de deux points étant connues, non-seulement nous donnent l'équation assujettie à passer par ces deux points, mais peuvent encore servir à déterminer la distance de ces deux points.

Fig. 83. En effet, soient (*fig.* 83) $AH = \alpha$, $HN = \beta$ les coordonnées du point N; et si l'on appelle x et y celles

du point M,... NM ou $z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$;

du point M′,... NM′ ou $z = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (y-\beta)^2}$;

du point M″,... NM″ on $z = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2}$;

du point M‴,... NM‴ ou $z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (\beta - y)^2}$;

ces quatre valeurs de z seront égales, parce que

$$(x-\alpha)^2 = (\alpha - x)^2, \text{ et que } (y-\beta)^2 = (\beta - y)^2,$$

comme on peut s'en assurer en examinant les développements de ces produits : donc

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \quad . \; . \; (140) \; [*]$$

est l'expression générale de la distance du point α, β *au point* x, y.

CHAPITRE X.

De l'équation du cercle.

Fig. 84. **236.** Soient (*fig.* 84) α et β les coordonnées AH et HO du centre O d'un cercle, x et y celles d'un point quelconque de la

[*] Nous ne mettons pas le double signe $\pm$ devant le radical, parce que, les deux points étant donnés de position, nous ne déterminons que la valeur absolue de la distance de ces points.

circonférence : la propriété du cercle étant que la distance de ces deux points, dont nous venons de trouver l'expression (art. 235), soit constamment égale au rayon a, il en résulte que

$$a = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

est l'équation la plus générale du cercle.

237. Cette équation se simplifie, lorsque l'extrémité E du diamètre (*fig.* 84) est transportée à l'origine A des coordonnées (*fig.* 85); car alors l'abscisse du centre $\alpha = a$, et son ordonnée $\beta = 0$. Substituant ces valeurs dans l'équation (141) élevée au carré, réduisant, et tirant la valeur de y, on obtiendra Fig. 85.

$$y^2 = 2ax - x^2, \text{ équation du cercle}$$

dont l'origine est à l'extrémité du diamètre.

238. On parvient à une équation encore plus simple, en faisant

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0;$$

alors l'origine est au centre, et l'équation générale élevée au carré devient

$$a^2 = x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = a^2 - x^2,$$

équation du cercle dont l'origine est au centre.

239. Si l'on veut savoir comment on peut appliquer à l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, le procédé que nous avons suivi (art. 199) pour construire par points le lieu d'une équation, il faut partager a en parties égales. Par exemple, si l'on prend a de cinq parties, on fera $2a = 10$ dans l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, et tirant la racine, on trouvera

$$y = \pm\sqrt{10x - x^2},$$

ce qui montre que, pour chaque valeur de x, il y aura deux valeurs de y qui devront se porter (*fig.* 85) en sens contraires. Fig. 85.

Faisant successivement	On trouve ces valeurs de y :	Valeurs positives :	Valeurs négatives :
$x = 0$, . . .	$y = 0$;	. . . . .	
$x = 1$, . . .	$y = \pm 3$;	$y = pn$ . . .	$y = pn'$
$x = 2$, . . .	$y + \pm 4$;	$y = qn$ . . .	$y = qn'$
$x = 3$, . . .	$y = \pm\sqrt{21}$;	$y = rn$ . . .	$y = rn'$
$x = 4$, . . .	$y = \pm\sqrt{24}$;	$y = sn$ . . .	$y = sn'$
$x = 5$, . . .	$y = \pm 5$;	$y = tn$ . . .	$y = tn'$
$x = 6$, . . .	$y = \pm\sqrt{24}$;	$y = un$ . . .	$y = un'$
$x = 7$, . . .	$y = \pm\sqrt{21}$;	$y = vn$ . . .	$y = vn'$
$x = 8$, . . .	$y = \pm 4$;	$y = zn$ . . .	$y = zn'$
$x = 9$, . . .	$y = \pm 3$;	$y = kn$ . . .	$y = kn'$
$x = 10$, . . .	$y = \pm 0$;	. . . . .	

Ayant déterminé les points désignés par n et par n', on pourra en trouver d'autres plus rapprochés, en donnant à x des valeurs intermédiaires, comme dans l'art. **200**. Enfin on prouverait, comme dans l'art. **202**, que tous les points qui correspondent aux valeurs comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 5$, et depuis $x = 5$ jusqu'à $x = 10$, forment une ligne continue.

CHAPITRE XI.

Des coordonnées des points d'intersection des lignes.

240. La plupart des problèmes de géométrie roulent sur les propriétés qui résultent de l'intersection des lignes droites avec d'autres lignes droites, ou avec la ligne circulaire.

Il est donc souvent très-utile de connaître les coordonnées du point de rencontre de deux lignes, pour pouvoir déterminer,

à l'aide d'un autre point ou d'une seconde condition, la grandeur et la position de ces lignes.

Lorsque les équations de deux lignes sont données, et qu'on regarde x et y comme représentant la même abscisse et la même ordonnée dans les deux équations, c'est admettre que x et y sont les coordonnées du point d'intersection : par conséquent, en éliminant successivement x et y, les valeurs que l'on obtiendra seront les coordonnées du point où les lignes peuvent se rencontrer ; valeurs qu'on ne pourrait évaluer numériquement, si les lignes ne se rencontraient jamais, comme nous le verrons dans l'article suivant.

241. Soient

$y = ax + b$ l'équation de la droite BC (*fig.* 86), Fig. 86.

$y = a'x + b'$ l'équation de la droite DE ;

j'élimine x entre ces deux équations. Pour cet effet, je multiplie la première par a', et la seconde par a ; retranchant cette dernière de l'autre, et divisant par le multiplicateur de y, j'obtiens

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Substituant cette valeur dans la première équation, multipliant par $a' - a$ pour faire évanouir le dénominateur, réduisant, et tirant la valeur de x, je trouve

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}.$$

Les valeurs $\frac{b - b'}{a' - a}$, $\frac{a'b - ab'}{a' - a}$, sont donc les coordonnées d'un point F de la ligne BC, puisque ce sont les valeurs particulières que peuvent prendre x et y, dans l'équation $y = ax + b$ de cette droite. Or, ces coordonnées du point F étant aussi deux valeurs particulières de x et y, dans l'équation $y = a'x + b'$

de la droite DE, le point F appartient donc aussi à la droite DE, d'où il suit qu'il ne peut être sur l'une et sur l'autre ligne qu'à leur point de rencontre.

242. Les droites ne s'atteignent pas lorsqu'elles sont parallèles; mais alors elles forment des angles correspondants égaux avec l'axe des abscisses; d'où il résulte que $a = a'$, et que les valeurs de x et de y deviennent

$$x = \frac{b - b'}{0} = \infty, \quad y = a\,\frac{(b - b')}{0} = \infty;$$

ce qui nous apprend que les coordonnées du point de rencontre sont alors infinies, c'est-à-dire que, quelque prolongées que soient les lignes, jamais elles ne se rencontreront.

CHAPITRE XII.

Problèmes de géométrie résolus par l'analyse indéterminée, au moyen de l'équation de la ligne droite.

PROBLÈME Ier.

243. *Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en deux parties égales.*

Fig. 87. Prenons pour origine le point A (*fig.* 87), et des points C et D abaissons les perpendiculaires CE, DF; les triangles ACE, BDF, seront égaux, et l'on aura

$$AE = BF, \quad CE = DF.$$

Nommons AE, x'; CE, y'; AB, x'';

la ligne AD étant assujettie à passer par les points A et D, on déterminera son équation au moyen des coordonnées de ces

points, de la manière suivante :

Pour le point A, l'abscisse $= 0$, l'ordonnée $= 0$;

Pour le point D, l'abscisse $= x'' + x'$, l'ordonnée $= y'$.

Mettant ces valeurs dans l'équation

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

de la droite assujettie à passer par deux points (art. 222), et considérant que les coordonnées α, β peuvent représenter celles du point A ou celles du point D (art. 223), je puis adopter arbitrairement l'une de ces hypothèses :

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 0, & \beta = 0, \\ \alpha' = x'' + x', & \beta' = y', \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{ll} \alpha = x'' + x', & \beta = y', \\ \alpha' = 0, & \beta' = 0. \end{array}\right.$$

Adoptant la première, et faisant donc les substitutions qu'elle exige, la formule (142) se réduit à

$$y - 0 = \frac{y' - 0}{x'' + x' - 0}(x - 0),$$

ou à $$y = \frac{y'}{x'' + x'}x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143),$$ *équation de la ligne droite* AD.

On trouvera de même l'équation de la ligne CB, au moyen des coordonnées des points C et B.

Pour le point C, l'abscisse $= x'$, l'ordonnée $= y'$;

Pour le point B, l'abscisse $= x''$, l'ordonnée $= 0$.

Adoptant l'hypothèse où α et β représentent les coordonnées x'' et 0 du point B, et où par conséquent α' et β' sont nécessairement celles du point C; substituant ces valeurs dans la

formule (142), je trouve

$$y = \frac{y'}{x' - x''}(x - x''),$$ *équation de la droite* CB.

244. Pour avoir les coordonnées AH et HG du point de rencontre des droites AD et CB, je regarde donc (art. **240**) x et y comme étant les mêmes dans leurs équations; et, égalant les valeurs de y, je trouve

$$\frac{y'}{x'' + x'}x = \frac{y'}{x' - x''}(x - x'');$$

supprimant le facteur commun y',

$$\frac{x}{x'' + x'} = \frac{x - x''}{x' - x''};$$

faisant évanouir les dénominateurs,

$$x(x' - x'') = (x - x'')(x'' + x');$$

développant, réduisant, et divisant ensuite le tout par x'', on obtient

$$x = \frac{x' + x''}{2};$$

telle sera la valeur de l'abscisse AH du point G d'intersection des deux diagonales (*fig.* 87); en la substituant dans l'équation (143) de AD, nous trouverons

$$y = \tfrac{1}{2}y' = \text{GH}.$$

Or les triangles semblables ADF, AGH d'une part, et les triangles semblables BCE, BGH de l'autre, nous donnent

$$\text{AD} : \text{AG} :: \text{DF} : \text{GH} :: y' : \tfrac{1}{2}y' :: 1 : \tfrac{1}{2},$$

$$\text{BC} : \text{BG} :: \text{CE} : \text{GH} :: y' : \tfrac{1}{2}y' :: 1 : \tfrac{1}{2};$$

donc $$\text{AG} = \tfrac{1}{2}\text{AD}, \quad \text{BG} = \tfrac{1}{2}\text{BC}.$$

PROBLÈME II.

245. *Connaissant l'équation* $y = ax + b$ *d'une droite* CD, *et les coordonnées* α *et* β *d'un point* M (*fig.* 80) *pris hors de cette droite, trouver l'expression de la longueur de la perpendiculaire menée du point* α, β *sur la droite donnée.* Fig. 80.

Si l'on savait quelles sont les coordonnées x et y du point C de rencontre, la valeur de CM serait déterminée (art. 235) par l'équation

$$\text{CM} = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}.$$

Or, les coordonnées du point C de rencontre se trouvent (art. 240) en éliminant successivement x et y entre l'équation donnée $y = ax + b$ de la droite CD, et l'équation de la perpendiculaire CM, que nous allons chercher.

Pour cet effet, a étant la tangente trigonométrique de l'angle que CD fait avec l'axe des abscisses, il en résulte (art. 231) que $\frac{1}{a}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que la perpendiculaire CM fait avec le même axe; et comme cette perpendiculaire passe par le point M, dont les coordonnées α et β sont données, l'équation de la droite CM (*fig.* 80) sera Fig. 80.

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha).$$

On obtiendra donc l'abscisse AL du point C d'intersection des droites CD et CM, en égalant les valeurs de y tirées de leurs équations, et l'on aura

$$ax + b = \beta - \frac{1}{a}(x - \alpha).$$

Faisant évanouir le dénominateur a, et passer les x dans le

même membre, il viendra

$$(a^2 + 1)\, x = \alpha - ab + a\beta,$$

et par conséquent

$$x = \frac{\alpha - ab + a\beta}{a^2 + 1}.$$

Retranchant α des deux membres, réduisant ensuite le second au même dénominateur, et supprimant les termes qui se détruisent, on trouve

$$x - \alpha = \frac{a\beta - a^2\alpha - ab}{a^2 + 1} = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{a^2 + 1},$$

expression qui, étant substituée dans l'équation de la perpendiculaire, nous fait obtenir

$$y - \beta = -\frac{(\beta - a\alpha - b)}{a^2 + 1}.$$

Mettant ces valeurs de $x - \alpha$ et de $y - \beta$ dans l'expression de CM, et observant, à l'égard de celle de $y - \beta$, que le signe négatif qui l'affecte devient positif dans son carré, on obtient enfin

$$\mathrm{CM} = \sqrt{\frac{a^2(\beta - a\alpha - b)^2 + (\beta - a\alpha - b)^2}{(a^2 + 1)^2}},$$

et en observant que $(\beta - a\alpha - b)^2$ est facteur commun,

$$\mathrm{CM} = \sqrt{\frac{(a^2 + 1)(\beta - a\alpha - b)^2}{(a^2 + 1)^2}}:$$

tirant la racine carrée des deux facteurs du numérateur et celle du dénominateur, on a

$$\mathrm{CM} = \frac{\sqrt{a^2 + 1} \times (\beta - a\alpha - b)}{a^2 + 1} = \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

expression de la longueur de la perpendiculaire abaissée du point α, β sur la droite dont l'équation est $y = ax + b$.

PROBLÈME III.

246. *Déterminer l'aire d'un triangle* ABC (*fig.* 88) *au moyen des coordonnées des sommets des angles de ce triangle.* Fig. 88.

Plaçons le sommet A à l'origine dont les coordonnées sont o, o, et nommons x', y' les coordonnées du point B, et x'', y'' les coordonnées du point C.

L'équation du côté BC, d'après la formule (137) (art. **222**) est

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x');$$

transposant y' dans le second membre,

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') + y';$$

réduisant ce second membre au même dénominateur, et supprimant les termes qui se détruisent, il vient (*)

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}.$$

Nous mettons l'équation du côté BC sous cette forme, pour qu'on puisse la comparer à l'équation générale $y = ax + b$, qui détermine les constantes a et b de l'expression de la perpendiculaire (art. **245**); cette équation se réduit à

$$\frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

parce que le point α, β, d'où cette perpendiculaire AD est abaissée, est pris sur l'origine.

(*) On parviendrait plus promptement à ce résultat au moyen de la formule (136) (art. **221**), en y remplaçant α, β et α', β' par les coordonnées x', y', et x'', y'' des points B et C.

Faisant donc

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, \quad \text{et} \quad b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'},$$

l'expression $\dfrac{-b}{\sqrt{1 + a^2}}$ devient $\dfrac{\dfrac{y''x' - y'x''}{x'' - x'}}{\sqrt{1 + \dfrac{(y'' - y')^2}{(x'' - x')^2}}}$.

La partie radicale qui divise, peut se mettre sous cette forme :

$$\sqrt{\frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}{(x'' - x')^2}} = \frac{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}}{x'' - x'}.$$

Substituant cette valeur de la partie radicale dans l'expression de la longueur de la perpendiculaire, et supprimant le diviseur commun $x'' - x'$ dans les deux termes de la fraction qui la compose, on a enfin

$$\text{AD} = \frac{y''x' - y'x''}{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}} \ldots \quad (144)$$

Et en observant que la distance des points C et B dont les coordonnées sont x'', y'', et x', y', est exprimée (art. 235) par

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2},$$

nous pourrons donc mettre BC à la place de cette quantité radicale dans l'expression (144) de la perpendiculaire, qui deviendra

$$\text{AD} = \frac{y''x' - y'x''}{\text{BC}}.$$

Cette expression, étant multipliée par $\dfrac{\text{BC}}{2}$, donne enfin

$$\frac{y''x' - y'x''}{2} = \text{aire triangle ABC}.$$

PROBLÈME IV.

247. *L'équation d'une droite assujettie à passer par un point* M (fig. 89) *étant donnée, trouver les coordonnées d'un point x, y, pris sur cette droite, en fonction de la distance* MN *des points α, β et x, y.* Fig. 89.

Ayant uni ces deux points par une droite, représentons par A la tangente trigonométrique qu'elle forme avec l'axe des abscisses : cette droite, passant par le point α, β, aura donc pour équation (art. 220)

$$y - \beta = A(x - \alpha) \ldots\ldots\ldots (145)$$

Nommons z la distance MN des points α, β et x, y; cette distance sera donnée (art. 235) par l'équation

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \ldots\ldots (146)$$

Au moyen des équations (145) et (146) qui contiennent les mêmes coordonnées, on pourra donc éliminer successivement x et y. Pour cet effet, l'équation (145), étant élevée au carré, donnera

$$(y - \beta)^2 = A^2 (x - \alpha)^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (146), celle-ci deviendra

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + A^2 (x - \alpha)^2,$$

ou, à cause que $(x - \alpha)^2$ est un facteur commun,

$$z^2 = (x - \alpha)^2 (1 + A^2);$$

d'où l'on tire $$(x - \alpha)^2 = \frac{z^2}{1 + A^2},$$

et, passant à la racine,

$$x - \alpha = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (145), nous obtenons

$$y - \beta = \pm \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Les expressions de $x - \alpha$ et de $y - \beta$, que nous venons de trouver, donnent évidemment :

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}} + \alpha, \\ y &= \pm \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}} + \beta, \end{aligned}\right\}$$ *expressions des coordonnées d'un point quelconque x, y, en fonction de sa distance z à un autre point α, β dont les coordonnées sont connues.*

PROBLÈME V.

248. *Démontrer les propriétés des sécantes extérieures et des cordes qui se coupent dans le cercle.*

L'équation du cercle, qui a l'origine pour centre, est $y^2 + x^2 = r^2$ (art. **238**). Lorsque ce cercle est rencontré par une droite assujettie à passer par le point α, β, les coordonnées x et y doivent être les mêmes au point de rencontre dans les deux équations (art. **240**). Or les coordonnées de cette droite, exprimées en fonction de la distance z de l'un de ses points x, y au point fixe α, β, sont (art. **247**)

$$x = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + A^2}} + \alpha, \quad y = \pm \frac{Az}{\sqrt{1 + A^2}} + \beta.$$

Par conséquent, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation du cercle, x et y perdront leur nature variable pour n'appartenir qu'au point d'intersection de la droite et du cercle : d'où il suit que z n'exprimera plus que la distance du point fixe α, β au point où la droite rencontre le cercle. Effectuons cette substitution des valeurs de x et de y dans l'équation du cercle ;

nous avons

$$\frac{z^2}{1+A^2} \pm \frac{2\alpha z}{\sqrt{1+A^2}} + \alpha^2 + \frac{A^2 z^2}{1+A^2} \pm \frac{2A\beta z}{\sqrt{1+A^2}} + \beta^2 = r^2. \quad (147)$$

Ordonnant par rapport à z, et observant que les termes en z^2 ont les mêmes dénominateurs, et qu'en ajoutant les numérateurs, et rassemblant entre deux parenthèses ce qui multiplie z^2, ces termes en z^2 se réduisent à

$$\frac{1 + A^2}{1 + A^2} z^2,$$

c'est-à-dire à z^2; formant ensuite un seul terme de ceux qui renferment z à la première puissance, parce que ces termes ont le même dénominateur, et transposant le terme r^2 dans le premier membre, l'équation précédente pourra s'écrire de cette manière :

$$z^2 \pm 2 \frac{(\alpha + A\beta)}{\sqrt{1 + A^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Cette équation étant du second degré, donne deux valeurs pour z; ce qui nous apprend que la droite qui fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est A, et passe par un point α, β, ne peut couper le cercle qu'en deux points, puisque z exprime la distance de α, β au point d'intersection.

L'Algèbre nous apprend que, dans une équation de degré pair dont la plus haute puissance de l'inconnue n'a de coefficient que l'unité, la partie qui ne contient pas cette inconnue est égale au produit des racines (*) : par conséquent, si

(*) On peut immédiatement reconnaître cette propriété des équations dans celle du second degré, représentée par

$$x^2 + px + q = 0;$$

nous appelons z' et z'' les distances du point α, β aux deux points d'intersection, nous aurons

$$z'\,z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

249. Si, du point α, β, nous menons une autre droite faisant un angle A′ avec l'axe des abscisses, il faudra changer A en A′ dans l'équation (147), pour qu'elle détermine, par les deux valeurs de z, les parties de cette nouvelle droite comprises entre le point α, β et les points où elle est coupée par le cercle. Soient t' et t'' ces parties, comme A n'entre que dans le terme affecté de z, on aura encore

$$t'\,t'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

En comparant la valeur de ce produit $t'\,t''$ à celui de $z'\,z''$, on verra qu'ils sont égaux, et l'on aura l'équation

$$z'\,z'' = t'\,t'',$$

qui, réduite en proportion, donnera

$$z' : t' :: t'' : z'' \ldots\ldots\ldots (148).$$

250. Pour trouver les propriétés géométriques renfermées dans cette proportion, il faut que le point α, β soit donné de position. Supposons-le d'abord hors du cercle (*fig.* 90); menons par ce point au centre du cercle une droite MO $= r'$; cette droite surpassant le rayon r, on aura

Fig. 90.

$$r^2 < r'^2.$$

---

car, en la résolvant, et nommant x' et x'' ses deux racines, on trouve

$$x' = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} \quad \text{et} \quad x'' = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Multipliant l'une par l'autre, et faisant les réductions nécessaires dans le second membre de la nouvelle équation, on obtient

$$x'\,x'' = q.$$

Si, au lieu de r'^2, nous mettons sa valeur tirée de l'équation

$$MO^2 = OP^2 + PM^2,$$

ou

$$r'^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

la condition nécessaire pour que le point α, β soit hors du cercle, sera exprimée par

$$r^2 < \alpha^2 + \beta^2.$$

On démontrerait de même que, si ce point était dans le cercle, on devrait avoir

$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2.$$

251. Supposons donc que le point donné soit hors du cercle en M (*fig.* 90) : alors z' et z'' sont les deux distances ME et MF à la courbe, d'une droite MF qui, étant menée du point α, β ou M, fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est A; de même t' et t'' sont les parties MG, MH d'une autre sécante partant du point M, et formant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est A'. Donc, en mettant ces valeurs dans la proportion (148), on la transforme en celle-ci : Fig. 90.

$$ME : MG :: MH : MF,$$

ce qui exprime la propriété des sécantes extérieures.

252. Enfin, si le point α, β est dans le cercle, z' et z'' représentent les parties d'une droite comprises entre ce point et ceux où elle rencontre la circonférence : donc, z' et z'' devenant les parties d'une corde coupée au point α, β par une droite dont les distances à la circonférence sont t' et t'', et qui par conséquent est une autre corde, dans ce cas, la proportion (148) nous apprend que deux cordes se coupent dans le cercle en raison réciproque.

—

CHAPITRE XIII.

Des branches des courbes.

253. L'équation du premier degré étant nécessairement celle d'une ligne droite, les autres lignes auxquelles on donne le nom de courbes, ne pourront donc être construites que par des équations des degrés supérieurs au premier (*).

Le mot de courbe est pris, par les géomètres, dans un sens encore plus étendu : ils appellent courbe le système général de tous les points déterminés successivement au moyen d'une équation (art. **200**), en donnant à l'abscisse toutes les valeurs positives depuis o jusqu'à l'infini, et toutes les valeurs négatives depuis o jusqu'à l'infini négatif.

254. Il semble d'abord qu'une courbe doive toujours s'étendre à l'infini dans les deux sens; mais on concevra facilement que son cours sera interrompu, si l'une des coordonnées devient imaginaire.

Fig. 85. Prenons pour exemple le cercle (*fig.* 85) dont l'origine est sur la courbe, à l'extrémité A du diamètre, et qui a pour équation (art. **238**),

$$y^2 = 2ax - x^2, \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{2ax - x^2} = \pm\sqrt{x(2a - x)}.$$

Si l'on donne à x des valeurs plus grandes que $2a$, le facteur $2a - x$ sera négatif, et rendra tel le produit $x(2a - x)$: donc

(*) Une courbe pouvant se tracer dès qu'on a une équation qui exprime la relation établie entre les coordonnées, la loi qui détermine la position des points de cette courbe est donc implicitement renfermée dans son équation. Mais on se tromperait bien, si l'on pensait que toute courbe dont les points sont assujettis à une loi donnée, dépend d'une équation d'un degré limité ; car dans le calcul différentiel, on connaît un genre de courbes appelées *courbes transcendantes*, qui ne peuvent appartenir à aucune des équations que nous offre l'Algèbre.

les deux valeurs de y deviennent alors imaginaires; ce qui prouve que la courbe ne s'étend pas au delà de $x = 2a$, dans le sens des x positifs. Si l'on fait ensuite x négatif, en mettant pour x la valeur $-x'$, le produit $x(2a - x)$ deviendra

$$-x'(2a + x'),$$

et restera toujours négatif, parce qu'il est composé de deux facteurs de signes contraires : donc y n'aura que des valeurs imaginaires, dans le sens des x négatifs.

Il résulte de cet examen, que la courbe est comprise, dans le sens des abscisses, entre o et $2a$, c'est-à-dire entre A et B.

255. Il arrive quelquefois qu'une courbe, après avoir interrompu son cours, le recommence, parce que l'une des coordonnées qui, pendant l'interruption, était devenue imaginaire, redevient réelle. Nous en avons un exemple dans la courbe (*fig.* 91), dont l'équation est Fig. 91.

$$y^2 = x^2 - a^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{x^2 - a^2};$$

car en donnant à x des valeurs positives plus grandes que a, cette équation donnera toujours pour chaque abscisse deux valeurs de y, qui s'accroîtront d'autant plus qu'on s'éloignera de l'origine O. De sorte qu'on aura les deux branches de courbe BM, BM′, qui s'étendront jusqu'à l'infini dans le sens des x positifs.

Mais si l'on donne à x des valeurs comprises dans l'intervalle AB, entre $x = a$ et $x = -a$, le radical devenant imaginaire, la courbe suspendra son cours; mais elle le reprendra depuis $x = -a$ jusqu'à l'infini négatif, car $(-x)^2$, c'est-à-dire x^2, surpassera de plus en plus a^2, et l'on aura une seconde portion de courbe NAN′ semblable à la première.

256. Lorsqu'il y a, comme dans cet exemple, une interruption dans le cours de la courbe, on pourra prouver, par la démonstration de l'art. 202, la continuité des parties de la courbe pour lesquelles les abscisses ne correspondent pas à des or-

données imaginaires. Ainsi on démontrera facilement que les branches BM, BM′ forment une ligne continue, et qu'il en est de même des branches AN, AN′.

257. Ces valeurs imaginaires des abscisses ou des ordonnées sont encore d'une grande utilité pour reconnaître le cours de certaines courbes, comme on peut le voir dans celle qui a pour équation

$$y^2 = \frac{b^2 x}{a - x}.$$

Passant à la racine, on a

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x}{a - x}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

faisant $x = 0$, cette équation se réduit à

$$y = \pm b \sqrt{\frac{0}{a}} = 0,$$

Fig. 92. et montre que y est nul à l'origine A (*fig.* 92).

Si l'on donne ensuite à x une valeur négative $-k$, l'équation (149) deviendra

$$y = \pm b \sqrt{-\frac{k}{a + k}},$$

valeur imaginaire; d'où il suit que la courbe ne s'étend pas dans la partie négative de l'axe des abscisses.

Donnons à x des valeurs positives que nous supposerons d'abord plus grandes que a, et ensuite plus petites; dans la première hypothèse, représentons par n une quantité positive, et supposons $x = a + n$. En substituant cette valeur dans l'équation (149), nous aurons

$$y = \pm b \sqrt{-\frac{a + n}{n}}.$$

Cette valeur imaginaire de y nous montre que la courbe ne

peut s'étendre au delà de l'abscisse AB $= a$ (*fig.* 92), et que par conséquent si nous menons par le point B une droite indéfinie RS parallèle aux ordonnées, il n'existera aucune partie de la courbe dans toute la région que cette ligne intercepte à notre droite. Fig. 92.

Si la courbe existe, cela ne peut donc être que dans la partie qui correspond à AB : c'est ce que notre seconde hypothèse va confirmer. En effet, si nous représentons par $a - m$ une quantité positive moindre que a, et que nous remplacions x par $a - m$ dans l'équation (149), nous trouverons

$$y = \pm b\sqrt{\frac{a-m}{m}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

et nous voyons que y sera réel tant que m sera au-dessous de a. L'ordonnée ayant deux valeurs, la courbe se compose de deux branches AC et AD qui ne rentrent pas sur elles-mêmes, comme dans le cercle; car plus la valeur $a - m$ de x s'accroît et s'approche de a, plus l'ordonnée y de l'équation (150) augmente.

Il est à observer que l'abscisse étant représentée par AP (*fig.* 92), l'équation $x = a - m$ donne

$$m = a - x = \text{AB} - \text{AP} = \text{PB};$$

donc m n'est autre chose que la distance du pied P de l'ordonnée PM au point B. Or, plus cette distance diminue, plus les deux termes de la fraction qui est sous le radical de l'équation (150) tendent à augmenter la valeur de cette fraction, et par conséquent celle de y, qui va en croissant jusqu'à l'infini. C'est ce que montre l'équation (150); car au dernier terme de la diminution de m, c'est-à-dire lorsque $m = 0$, cette équation se réduit à $y = \pm b\sqrt{\frac{a}{0}} = \infty$. On voit donc que les deux branches de la courbe, au lieu

Fig. 92. de s'arrêter en C et en D, se prolongent jusqu'à l'infini, se rapprochant continuellement de la direction de la droite SR.

258. Il existe des courbes composées de parties dissemblables, mais qui n'en constituent pas moins une seule courbe, parce qu'elles dérivent de la même équation.

Par exemple, si l'on a l'équation

$$ay^2 - x^3 + (b - c)\,x^2 + bcx = 0, \ldots \quad (151)$$

on trouvera, en faisant passer tous es termes, hors le premier, dans le second membre, et en observant que x est facteur commun,

$$ay^2 = x\,(x^2 + cx - bx - bc).$$

La quantité qui est entre les parenthèses revient à

$$(x + c)\,x - (x + c)\,b;$$

et comme $x + c$ est facteur commun, on peut l'écrire ainsi :

$$(x + c)\,(x - b);$$

d'où il résulte que l'équation (151) prendra la forme

$$ay^2 = x\,(x + c)\,(x - b);$$

divisant par a, et tirant la racine, on obtient

$$y = \pm\sqrt{\frac{x\,(x + c)\,(x - b)}{a}}. \ldots \quad (152)$$

En donnant à x des valeurs positives comprises entre o et b, le facteur $x - b$ sera toujours négatif; et, par conséquent, le produit de $x - b$ par celui des autres facteurs qui sont positifs donnera un produit négatif : donc y restera imaginaire, tant que x sera compris entre o et b; mais, au delà de $x = b$, le facteur $x - b$ devenant positif, la valeur de y sera réelle, et d'autant plus grande que x s'accroîtra; et comme y a deux

valeurs égales et de signes contraires, la courbe naîtra (*fig.* 93) au point B distant de l'origine A, d'une quantité AB $= b$, et prolongera, dans le sens des x positifs, jusqu'à l'infini ses deux branches BM, BM'. Fig. 93.

On donnera ensuite des valeurs négatives à x, en faisant $x = -x'$, et l'on aura

$$y = \pm \sqrt{\frac{x'(x'+b)(c-x')}{a}}.$$

Les facteurs x et $x - b$ deviendront $-x'$ et $-(x'+b)$; leur produit sera donc la quantité positive $x'(x'+b)$. Quant au facteur $x'+c$, il sera remplacé par $c - x'$, et le signe du produit

$$x' \frac{(x'+b)(c-x')}{a}$$

dépendra de celui de $c - x'$. Or, $c - x'$ est positif tant que x' est moindre que c, et devient négatif dès que x' surpasse c; dans le premier cas, la valeur de y est réelle, et, dans le second, elle est imaginaire : donc la courbe ne se prolonge, dans le sens des x négatifs, que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -c$; et, par conséquent, si l'on représente par AD l'abscisse $-c$, la courbe ne s'étend pas au delà de AD dans le sens des x négatifs. Elle est aussi limitée, dans le sens des ordonnées, dans cet intervalle AD; car la fonction de x' dont se compose y, n'admettant pas pour x' des valeurs plus grandes que c, cette fonction y a des bornes dans ses différents états de grandeur : donc la partie de la courbe qui répond aux x négatifs ne pouvant s'étendre indéfiniment dans le sens des y, doit se trouver renfermée dans un certain espace, comme on le voit (*fig.* 93).

259. Nous ne nous étendrons pas sur les propriétés des courbes, que l'on ne peut bien connaître que dans le calcul différentiel; les notions que nous venons de donner sur leurs branches suffisent pour la recherche qui va nous occuper.

CHAPITRE XIV.

De l'ellipse.

260. Nous avons déterminé (art. 236) l'équation du cercle, qui n'est qu'un cas particulier de l'ellipse dont, en procédant de la même manière, nous allons chercher l'équation d'après sa propriété caractéristique :

L'ellipse est une courbe (*) *telle que la somme des distances de* FM, F'M *d'un de ses points* M *à deux points fixes* F *et* F' (fig. 94) *est égale à une ligne donnée* $2a$.

Fig. 94.

Pour trouver l'équation de cette courbe, représentons par $2c$ la distance des deux points fixes F et F' (*fig.* 94). La ligne étant supposée courbe, tous ses points ne peuvent être dans une même direction; donc elle doit avoir des points hors de celle de FF'; et si de l'un de ces points, M, on mène les droites MF, MF', le triangle MFF' aura nécessairement lieu; ce qui exige que $2a$ surpasse FF' : car, si l'on avait $2a = 2c = FF'$, comme, par hypothèse, $2a = MF + MF'$, on conclurait que $MF + MF' = FF'$, c'est-à-dire que la somme des deux côtés d'un triangle est égale au troisième, ce qui est inadmissible.

D'une autre part, il serait absurde de supposer $2a < 2c$; car, en mettant les valeurs de $2a$ et de $2c$, on aurait

$$MF + MF' < FF';$$

(*) Quoique le sens général attribué au mot *courbe* comprenne toutes les lignes, même la ligne droite, nous entendons par *courbe*, dans cet énoncé, seulement une ligne dont tous les points ne sont pas dans une même direction; autrement la ligne droite remplirait la condition requise; car soit $FF' = 2a$ (*fig.* 93); pour tout point M de FF', on a

$$FM + F'M = 2a.$$

Cette propriété de l'ellipse appartient à la ligne droite, parce que cette ligne peut être regardée comme la limite des ellipses.

et il en résulterait que les droites FM et F'M qui partent des extrémités F et F', ne pourraient se rencontrer, puisque leur somme serait moindre que la droite FF' qui les sépare. Il résulte de ce qui précède, qu'on ne peut avoir que

$$FM + F'M > FF',$$

c'est-à-dire $$2a > 2c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

Cela posé, partageons la distance FF' (*fig.* 94) en deux parties égales au point O, où nous placerons l'origine; nommons x, y les coordonnées OP, PM du point M, et soient z, z' les distances MF et MF' de ce point M aux foyers; par la propriété du carré de l'hypoténuse, les triangles rectangles MPF', MPF, donneront lieu aux équations Fig. 94.

$$F'M^2 = F'P^2 + PM^2 = (OP + OF')^2 + PM^2,$$

et $$z'^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad \ldots\ldots \quad (154)$$

$$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (OP - OF)^2 + PM^2,$$

ou $$(*)\ z^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

auxquelles il faut joindre cette troisième, donnée immédiatement par la condition du problème

$$F'M + FM = 2a,$$

ou $$z' + z = 2a. \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

(*) Si l'ordonnée était prise dans l'intervalle FF' (*fig.* 94), ces équations (154), (155), ne subiraient aucun changement : car en prenant M' au lieu de M, nous aurions trouvé, à la place de l'équation (154), celle-ci :

$$F'M'^2 = (OF' + OP')^2 + P'M'^2 \quad \text{ou} \quad z'^2 = (c + x)^2 + y^2,$$

et l'on voit que $(c - x)^2$ aurait le même développement que $(x - c)^2$, dans l'équation (155); et en prenant M'', le changement du signe de c dans l'équation (155), et celui de x dans l'équation (155), substituerait ces équations l'une à l'autre.

Retranchant l'équation (155) de l'équation (154), et réduisant, on obtiendra

$$z'^2 - z^2 = 4cx; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

et observant qu'en général une expression de cette forme $a^2 - b^2$ résulte du produit de $a + b$ par $a - b$, on peut écrire ainsi l'équation (157) :

$$(z' + z)(z' - z) = 4cx.$$

Si l'on y met la valeur $z' + z$ tirée de l'équation (156), elle devient

$$2a(z' - z) = 4cx;$$

et, en divisant par $2a$, donne

$$z' - z = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Ajoutant à cette équation celle que nous avons désignée par (156), on trouve

$$2z' = 2a + \frac{2cx}{a},$$

et, par conséquent,

$$z' = a + \frac{cx}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Substituant le carré de cette valeur de z' dans l'équation (154), développant et réduisant, il vient

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2;$$

d'où l'on tire

$$y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2 - x^2.$$

Réduisant au même dénominateur le second membre, on a

$$y^2 = \frac{a^4 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2}{a^2},$$

ou, parce que l'inégalité 153, page 155, nous a appris que a surpassait c,

$$y^2 = \frac{(a^2 - c^2)\,a^2 - (a^2 - c^2)\,x^2}{a^2};$$

et, par conséquent,

$$y^2 = \frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(a^2 - x^2) \ldots\ldots (159)$$

est l'équation d'une ellipse, mais qui n'est pas mise encore sous sa forme la plus simple.

261. Les points F et F′ portent le nom de *foyers;* leur distance $2c$ est ce qu'on appelle l'*excentricité*, et FM, F′M sont les rayons vecteurs.

Nommons b l'ordonnée OD qui passe par le centre O; il existe entre b, c et a une relation remarquable; pour la trouver, remarquons qu'à cause de OF = OF′ = c, les triangles rectangles ODF, ODF′ (*fig.* 95) sont égaux, et donnent FD = F′D; et comme, lorsque M est transporté en D, l'équation Fig. 95.

$$F'M + FM = 2a$$

devient

$$F'D + FD = 2a,$$

si nous remplaçons F′D par FD, nous conclurons que FD = a; par conséquent l'équation

$$OD^2 = FD^2 - OF^2,$$

qui a lieu dans le triangle rectangle ODF, par la propriété du carré de l'hypoténuse, deviendra, en y mettant les valeurs de OF, de FD et de OD,

$$b^2 = a^2 - c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (160)$$

262. Au moyen de cette relation, nous changerons l'équation (158) en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \ldots (161),$$ *équation de l'ellipse rapportée au centre.*

Chassant le dénominateur et laissant le terme constant dans le second membre, cette équation peut se mettre sous cette forme plus symétrique,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2. \quad \ldots\ldots \quad (162)$$

263. Pour analyser la courbe, résolvons séparément son équation, par rapport à x et par rapport à y, ce qui nous donnera

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \ldots\ldots \quad (163)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots\ldots \quad (164)$$

Or, on voit que si l'on fait $y = 0$, dans l'équation (163), elle devient

$$x = \pm a \frac{\sqrt{b^2}}{b},$$

et se réduit à $\quad x = \pm a;$

la première de ces valeurs, donnée par le signe supérieur, étant positive, sera comprise depuis l'origine O jusqu'au point B, où la courbe rencontre l'axe des abscisses; et l'autre, comme négative, sera comprise depuis l'origine jusqu'au point A, où la courbe coupe l'axe de x; la ligne $2a$ représentée par AB sera donc partagée en deux parties égales à l'origine; cette ligne porte le nom de *grand axe de l'ellipse*. Si l'on fait de même $x = 0$ dans l'équation (164), l'ordonnée qui passe par le point où x est nul, c'est-à-dire par l'origine, aura ces deux valeurs égales et de signes contraires, $+b$, $-b$. Il est évident que la première sera représentée par OD, et la seconde par OE; la ligne DE $= 2b$ sera donc aussi partagée en deux parties égales à l'origine : on a donné à cette ligne le nom de *petit axe*.

Si des points de l'ellipse compris depuis B jusqu'à D, on abaisse des ordonnées sur le demi-grand axe BO, on verra que la partie négative qui est sous le radical de l'équation (164)

diminuant successivement, la ligne représentée par le radical s'accroîtra à mesure; d'où il suit que les ordonnées depuis B jusqu'à D vont toujours en croissant; et comme le carré x^2 appartient aussi bien à $+x$ qu'à $-x$, on voit que les ordonnées positives situées sur la partie négative de l'axe des abscisses, portées dans le quadrant DOA, passeront par les mêmes états de grandeur que les ordonnées positives portées dans le quadrant DOB; par conséquent, l'arc DA de l'ellipse sera semblable en tout à l'arc DB.

264. Nous n'avons employé jusqu'à présent que le signe supérieur du radical de l'équation (164); mais si nous ne prenons que le signe inférieur, l'équation (164) déterminera pour y des valeurs égales et situées en sens contraire de celles dont nous venons de parler; ce qui établira au-dessous de l'axe des x une partie AEB absolument semblable à la partie ADB.

Enfin, si dans l'équation (164) on donne à x une valeur plus grande que a, en faisant $x = a + \alpha$, cette équation donnera

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-(2a\alpha + \alpha^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (165)$$

Cette valeur imaginaire de y prouve que la courbe ne s'étend pas au delà de l'abscisse OB; et comme α est aussi bien le carré de $-x$ que de $+x$, on voit qu'en donnant à $-x$ la valeur $-(a+\alpha)$, on tombera sur l'équation (165), ce qui prouve aussi que la courbe ne s'étend pas au delà du point A.

265. L'équation (163) construirait la même courbe en prenant le petit axe pour celui des abscisses, et le grand axe pour celui des ordonnées. En effet, le point M (*fig.* 96), Fig 96.
déterminé par les coordonnées,

$$\text{OP} = x \quad \text{et} \quad \text{PM} = y,$$

Fig. 96. le serait également, si l'on prenait (*fig.* 96)

$$OQ = y \text{ et } QM = x.$$

On prouverait donc avec l'équation (163), par les mêmes raisonnements qui ont été appliqués à l'équation (164), que la courbe ne peut s'étendre au delà du petit axe.

266. Ce qui précède nous fournit les moyens de décrire l'ellipse par points, lorsque le grand axe et le petit axe seront donnés. Pour cet effet, on commencera par déterminer les foyers en décrivant avec un rayon a parti de l'extrémité D du petit axe, deux arcs de cercle qui couperont le grand axe aux points F et F′ ; ayant ensuite partagé AB en deux parties
Fig. 95. inégales (*) Bn, An (*fig.* 95), on les prendra pour rayons de deux arcs de cercle que l'on décrira des foyers F et F′ comme centres. Ces arcs, en se coupant, détermineront deux points M et M′ de l'ellipse; car, d'après cette construction, la somme des rayons vecteurs FM et F′M vaudra le grand axe AB, l'un ayant de plus ce que l'autre a de moins.

On peut aussi décrire l'ellipse par un mouvement continu; pour cela on fixera à deux points F et F′ les extrémités d'un fil égal à AB, et tenant ce fil tendu avec un style que l'on fera mouvoir, on tracera l'ellipse, car on aura toujours

$$FM + F'M = AB = 2a.$$

267. Les foyers jouissent encore de la propriété d'être les seuls points de la surface de l'ellipse dont la distance à un point de la courbe est une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

Fig. 97. Pour le démontrer, nommons z la distance MN d'un point N (*fig.* 97) pris dans l'intérieur de l'ellipse à un point M de la courbe; α, β et x, y, les coordonnées de N et de M; la distance MN de ces points sera donnée (art. **235**) par l'équation

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2;$$

(*) Si ces lignes étaient égales, le procédé que nous indiquons ne servirait qu'à déterminer les extrémités E et D du petit axe que nous connaissons.

et en développant les carrés, on aura

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 \ldots\ldots (166)$$

Le point M appartenant à l'ellipse, nous pouvons remplacer y par sa valeur tirée de l'équation (161), et il viendra

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \mp 2\beta\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \beta^2 \ldots (167)$$

Pour que cette valeur puisse être rationnelle, il faut qu'elle soit délivrée du radical : c'est à quoi l'on parviendra, en remarquant que la position du point α, β étant arbitraire, nous pouvons disposer des coordonnées de ce point pour la déterminer convenablement à la question. Ainsi, en faisant $\beta = 0$, l'équation (167) se réduira à

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \ldots\ldots\ldots (168)$$

Cette valeur nulle de l'ordonnée β nous montre déjà que le point N doit être situé sur l'axe des x ; α restant indéterminé, disposons-en de manière que la valeur de z soit rationnelle : c'est ce qui aura lieu si le second membre de l'équation (168) est un carré parfait. Pour cela, réduisons les termes en x^2 au même dénominateur, l'équation (168) prendra cette forme :

$$z^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2 ;$$

remplaçons $a^2 - b^2$ par sa valeur c^2, que donne l'équation (160) ; nous aurons

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots (169)$$

Comparons maintenant le second membre de l'équation (169) au carré parfait $A^2 - 2AB + B^2$, nous verrons que A sera représenté par $\frac{cx}{a}$, racine du premier terme du second membre ; et, pour que cette expression entre dans le terme $2\alpha x$, nous écrirons ainsi ce terme : $2\frac{cx}{a} \times \frac{a}{c}\alpha$, ce qui n'en change pas la valeur ; alors $\frac{a}{c}\alpha$ tiendra la place de B. La condition nécessaire pour que le second membre de l'équation (169) soit un carré, sera donc qu'on ait

$$\frac{a^2\alpha^2}{c^2} = \alpha^2 + b^2,$$

équation par laquelle nous déterminerons α; nous en tirons

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2 - c^2} c^2;$$

et comme (art. **261**) $a^2 - c^2 = b^2$, cette équation se réduit à

$$\alpha^2 = c^2,$$

et par conséquent $\alpha = \pm c$. . . . . (170)

263. La première valeur de α, parce qu'elle est positive, indique
Fig. 98. (*fig.* 98) le foyer F, et la seconde étant négative, indique le foyer F'.

En mettant la première de ces valeurs dans l'équation (169), cette équation devient

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + c^2 + b^2,$$

et, au moyen de l'équation (160), se réduit à

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2.$$

Passant à la racine et observant que a surpasse l'un et l'autre des deux facteurs c et x de la fonction $\frac{cx}{a}$, on a

$$\pm z = a - \frac{cx}{a} \text{ . . . . . (171)}$$

Considérons d'abord le signe supérieur : on a vu, au commencement de cet article, que c était l'abscisse du foyer F, et qu'à cette abscisse répondait le rayon vecteur $z = \text{FM}$: nous aurons donc pour la valeur de FM,

$$z = a - \frac{cx}{a} \text{ . . . . . (172)}$$

A l'égard de la seconde valeur $-c$ de α que comporte l'équation (170), en la substituant dans l'équation (169), et en désignant par z' le rayon vecteur qui s'y rapporte, nous avons, pour déterminer F'M,

$$z' = a + \frac{cx}{a};$$

ce qui s'accorde avec l'équation (158) (page 156) [*], et nous voyons

---

[*] Les valeurs de z' et de z que donnent les équations (156) et (158), constatent bien que les distances z' et z d'un des foyers à un point de la courbe sont des fonctions rationnelles de l'abscisse de ce point; mais il restait à prouver que cette propriété n'appartient qu'aux foyers.

que la somme des rayons vecteurs z et z' est égale à $2a$; condition exigée par l'équation (156), ce qui montre que la courbe est une ellipse.

269. Il nous reste à examiner ce que signifie la valeur négative de z de l'équation (171) : il est certain que cette valeur, portée en sens contraire de la positive, correspond à un point M' (*fig.* 98) de la courbe ; l'abscisse de ce point n'est plus OP, mais OP', et par conséquent détermine une valeur négative FM', différente de FM. Si l'angle MFB est aigu par exemple, il ne sera pas difficile de s'apercevoir que l'angle M'FB, qui en est le supplément, sera obtus, et que par conséquent l'ordonnée M'P', qui appartient à un plus grand arc, surpassera l'ordonnée MP, ce qui nécessite qu'en vertu des triangles semblables M'P'F, MPF, la droite M'F l'emporte sur la droite MF. Fig. 98.

270. Les extrémités A et B (*fig.* 96), où la courbe rencontre le grand axe, sont appelées les *sommets*. Fig. 96.

On peut en prendre un pour origine, A par exemple : nommant x' l'abscisse AP comptée de ce sommet, il y aura, entre cette abscisse et l'abscisse x comptée du centre, la relation suivante :

$$\mathrm{OP} = \mathrm{AP} - \mathrm{AO},$$

ou

$$x = x' - a.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

on obtiendra

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2), \ldots (173),$$ *équation de l'ellipse rapportée au sommet* A.

271. Quoique nous ayons été conduits à cette équation en supposant que l'abscisse x comptée du centre correspondait à un point pris sur la partie DBE de l'ellipse, l'équation ne serait pas altérée si ce point était pris sur la partie DAE ; car alors l'abscisse devenant négative, au lieu de

$$x = x' - a,$$

on aurait

$$x = -(x' - a);$$

expression qui, étant élevée au carré, nous ramènerait à la valeur de x^2 qui a servi à transformer l'équation de l'ellipse rapportée au centre en celle où l'origine est au sommet.

Fig. 99. **272.** Soient α et β les coordonnées OP et PM (*fig.* 99) d'un point M de l'ellipse, et α', β' les coordonnées OP′ et P′M′ d'un autre point M′ : mettons successivement ces valeurs à la place de x et de y dans l'équation (161) de l'ellipse, nous aurons

$$\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2),$$

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2):$$

donc $$\beta^2 : \beta'^2 :: \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2) : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2); \ldots (174)$$

et supprimant le facteur commun $\frac{b^2}{a^2}$, et observant que $(a^2 - \alpha^2) = (a + \alpha)(a - \alpha)$, et que le produit $(a^2 - \alpha'^2)$ peut se décomposer de la même manière, l'équation précédente deviendra

$$\beta^2 : \beta'^2 :: (a + \alpha)(a - \alpha) : (a + \alpha')(a - \alpha'), \ldots (175)$$

c'est-à-dire

$$PM^2 : P'M'^2 :: (OA + OP)(OB - OP) : (OA + OP')(OB - OP'),$$

ou $$PM^2 : P'M'^2 :: AP \times PB : AP' \times P'B;$$

par conséquent, dans l'ellipse, *le carré d'une ordonnée menée sur le grand axe est au carré d'une autre comme le produit des distances du pied de la première de ces ordonnées aux deux sommets est au produit des distances du pied de la seconde à ces mêmes sommets* (*).

273. Si l'on veut compter les abscisses sur le petit axe, Fig. 96. soient (*fig.* 96) x' et y' les coordonnées OQ et QM d'un point M

(*) Cette propriété nous fournit le moyen de décrire l'ellipse par

dans cette nouvelle hypothèse; on aura (*fig.* 96) Fig. 96.

$$OP = QM, \quad MP = OQ,$$

ou

$$x = y', \qquad y = x'.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (162), nous trouverons

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = a^2 b^2, \ldots (176)$$ *équation de l'ellipse rapportée au petit axe, l'origine étant au centre.*

On voit que cette équation est de même forme que l'équation (162).

L'équation (176), étant résolue, nous donne

$$y' = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x'^2},$$

et nous montre que y' a toujours des valeurs égales et de signes contraires, ce qui prouve que le petit axe, comme le grand, partage la courbe en deux parties égales et absolument semblables.

274. Le petit axe, sans l'excentricité, ne différerait pas du grand axe; aussi, lorsque les points F et F′ coïncident, cas où c est nul, l'équation (160) se réduit-elle à $b = a$, et par suite, l'équation (162), en supprimant le facteur commun a^2,

---

points; car lorsqu'on connaît deux coordonnées α, β, et qu'on prend arbitrairement l'abscisse α', l'équation (175) nous donne

$$\beta'^2 = \frac{\beta^2 (a + \alpha')(a - \alpha')}{(a + \alpha)(a - \alpha)};$$

α et β étant donnés, et ayant pris α' arbitrairement, on voit que tout sera connu dans le second membre de cette équation; et comme $\frac{\beta^2}{a + \alpha}$ et $\frac{(a + \alpha')(a - \alpha')}{(a + \alpha)(a - \alpha)}$ sont des troisièmes proportionnelles, que nous représenterons par P et par Q, nous aurons donc $\beta'^2 = PQ$; par conséquent, en prenant une moyenne proportionnelle entre P et Q, nous pourrons déterminer l'ordonnée β', qui appartient à l'abscisse α'.

devient

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

ce qui est l'équation du cercle (art. 238).

275. Si l'on décrit, sur un même diamètre $2a$, un cercle et une ellipse, et qu'on nomme y' et y'' les ordonnées de l'ellipse et du cercle, correspondantes à une même abscisse x, l'équation de l'ellipse donnera, entre x et y', cette relation :

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

et celle du cercle donnera, entre x et y'', celle-ci :

$$y''^2 = (a^2 - x^2).$$

Éliminant $a^2 - x^2$ entre ces deux équations, on trouvera

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} y''^2,$$

et, passant à la racine,

$$y' = \frac{b}{a} y''; \quad \ldots\ldots\ldots (177)$$

d'où l'on tire la proportion

$$y'' : y' :: a : b :: 2a : 2b;$$

ce qui nous apprend que *l'ordonnée du cercle est à celle de l'ellipse dans le rapport constant du grand axe au petit axe.*

On pourra donc déterminer les ordonnées de l'ellipse au moyen de celles du cercle, lorsqu'on connaîtra le rapport du grand axe au petit axe de l'ellipse.

276. Si l'on considère qu'une ligne divisée par une autre exprime un rapport, et que a et b sont constants, on reconnaîtra, d'après l'équation (161), que l'ellipse est un cercle dont les ordonnées sont multipliées par un rapport constant.

D'où il suit qu'un cercle incliné projeté sur un plan par des perpendiculaires abaissées de chacun des points de ce cercle sur

ce plan y trace une ellipse parce que chacune des coordonnées de cette ellipse équivaut à l'ordonnée du cercle qui aboutit au même point, multipliée par le cosinus de son inclinaison (*).

277. Le paramètre est la double ordonnée HH′ (*fig.* 96) qui passe par le foyer (**). Pour le déterminer, on substituera donc à x, dans l'équation de l'ellipse, l'abscisse c du foyer; et, en nommant p l'ordonnée qui répond à cette valeur de x, l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ deviendra Fig. 96.

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2).$$

Mettant, à la place de $a^2 - c^2$, sa valeur b^2 donnée par l'équation (160), on aura

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2},$$

et en multipliant chaque membre par 4,

$$(2p)^2 = \frac{4b^4}{a^2}.$$

Tirant la racine de chaque membre de cette équation, on obtiendra

$$2p = \frac{2b \times 2b}{2a};$$

(*) Pour le démontrer, soient BC (*fig.* 64) l'ordonnée y', AC $= y$ celle de l'ellipse, et B l'angle d'inclinaison; on a Fig. 64.

$$1 : \cos B :: y' : y; \quad \text{donc} \quad y = y' \cos B.$$

(**) Les géomètres du siècle dernier désignaient par les constantes a et b le grand axe et le petit axe; les modernes, soit parce qu'ils rapportent plus communément l'origine des coordonnées au centre, soit pour simplifier les calculs et leur donner plus de symétrie, désignent ces axes par $2a$ et $2b$, et l'analogie leur a fait appeler le paramètre $2p$ et l'excentricité $2c$.

ce qui nous apprend que *le paramètre 2p est une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe.*

278. Si l'on substitue la valeur $\frac{p}{a}$ de $\frac{b^2}{a^2}$ dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$y = \frac{p}{a}(a^2 - x^2),$$ *équation de l'ellipse rapportée au paramètre.*

279. Déterminons maintenant l'équation de la tangente à l'ellipse. Pour cet effet, nous remarquerons que dans une courbe quelconque la corde ou sécante M″M′ (*fig.* 100) se change en une tangente à la courbe lorsque, l'arc M″M′ devenant nul, les points M′ et M″ coïncident. Exprimons cette condition analytiquement. Soient donc x', y', et x'', y'' les coordonnées des points M′ et M″; la sécante M″S (*fig.* 100), qui est le prolongement de la corde M′M″, n'étant autre chose que la droite assujettie à passer par les points x', y', et x'', y'', nous déterminerons l'équation de cette droite en substituant, dans la formule (137) (page 126), les coordonnées x', y' et x'', y'' des points M′ et M″ à la place de α, β et de α', β'; nous trouverons, pour l'équation de la sécante M′S,

Fig. 100.

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \quad \ldots\ldots (178)$$

Les points M′ et M″ appartenant à l'ellipse, l'équation (162) de cette courbe rapportée au centre devra être satisfaite par les coordonnées x', y' et x'', y'' des points M′ et M″, et nous aurons

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \quad a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2. \quad (179)$$

Retranchant la première de ces équations de l'autre, on obtient

$$a^2(y''^2 - y'^2) + b^2(x''^2 - x'^2) = 0; \ldots\ldots (180)$$

et par la raison qu'en général $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

l'équation (180) peut se décomposer ainsi en facteurs

$$a^2(y''-y')(y''+y')+b^2(x''-x')(x''+x')=0,$$

et donne $$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{(x''+x')}{y''+y'}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (178) de la sécante deviendra

$$y-y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{(x'+x'')}{(y'+y'')}(x-x')\ldots\ldots(181)$$

La corde M′M″ sera tangente à la courbe lorsque les points M′ et M″ coïncideront, et qu'on aura par conséquent

$$x''=x',\quad y''=y'\ (*);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (181), supprimant le diviseur commun 2, et observant que dans ce cas l'angle S devient l'angle MTP, ou, plus simplement, l'angle T, et que l'équation (181) se transforme en celle de la droite TM, on aura

$$y-y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x-x')\ldots(182),$$ *équation de la tangente au point* M (**).

Laissant le terme y seul dans le premier membre, pour pouvoir comparer cette équation à l'équation (132) de la ligne droite (art. 216), on voit, par ce rapprochement, que ce qui multiplie $x-x'$ dans l'équation (182) est la tangente tri-

(*) Si l'on avait substitué immédiatement ces valeurs de x'' et de y'' dans l'équation (178), le coefficient de $x-x'$ se serait réduit à $\frac{0}{0}$; or il est démontré, en Algèbre et dans mes *Éléments de Calcul différentiel*, que ce cas n'arrive que par la présence d'un facteur commun, dont il faut délivrer la fraction pour qu'on en puisse connaître la vraie valeur.

(**) Le signe négatif affecte le second membre, parce que, d'après la *fig.* 99, la sécante et la tangente tombent, comme dans le cas de la *fig.* 74 (art. 210); aussi en écrivant de cette manière l'équation (182),

$$y=\frac{b^2}{a^2}\frac{x'^2}{y'^2}+y'-\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}x,$$

reconnaît-on qu'elle est tout à fait de la forme de l'équation (art. 210) d'une droite qui coupe à angle obtus l'axe des y.

Fig. 101. gonométrique de l'angle formé par la tangente MT (*fig.* 101) avec l'axe de x; par conséquent, nous avons

$$\text{tang } \textit{trig. de l'angle } \mathrm{T} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'} \quad \ldots\ldots (183)$$

280. Exprimons cette valeur en fonction de l'angle O que la droite OM, menée par le centre au point de tangence, fait avec l'axe des abscisses, les coordonnées du point M étant x' et y', nous aurons

$$x' : y' :: 1 : \text{tang O};$$

d'où nous tirerons $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{1}{\text{tang O}}$;

par conséquent, l'équation (183) deviendra

$$\text{tang } \textit{trig. de l'angle } \mathrm{T} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\text{tang O}} \quad \ldots\ldots (184)$$

La valeur de tang *trig. de l'angle* T n'étant point affectée du double signe, il s'ensuit qu'on ne peut mener qu'une seule tangente à un point donné M de l'ellipse. Si ce point donné est le sommet B de la courbe, comme les coordonnées x', y' de M deviennent, dans ce cas, $x' = a$ et $y' = 0$, l'équation (183) donne

$$\text{tang } \textit{trig. de l'angle } \mathrm{T} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a}{0} = -\infty;$$

ce qui montre que la tangente en B est parallèle au petit axe.

Fig. 100. Mais si le point M s'approche de D (*fig.* 100), x' diminue en même temps que y' s'accroît; ces valeurs de x' et de y' tendent donc l'une et l'autre à diminuer la valeur absolue du second membre de l'équation (183), c'est-à-dire à diminuer l'angle MTO (*fig.* 100), ou à rendre l'angle MTX plus obtus. Enfin, lorsque le point M arrivera en D, la valeur de tang *trig. de l'angle* T (équat. 183) deviendra nulle, et par conséquent cette tangente sera parallèle à l'axe des x.

Il serait facile de faire des observations analogues dans les autres quadrants de l'ellipse.

281. On peut rendre l'équation de la tangente plus symétrique. Pour cela, chassant le dénominateur du second membre de l'équation (182), et faisant passer les termes en x'^2 et en y'^2 dans le second membre, on obtiendra

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2y'^2 + b^2x'^2;$$

cette équation, au moyen de l'équation (162), se réduit à

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots (185)$$

Telle est, sous la forme la plus simple, l'équation de la tangente au point x', y'.

282. Si au point de contact on mène une perpendiculaire MR (*fig.* 101) à la tangente, cette perpendiculaire porte le nom de *normale*. Il est facile, d'après l'art. 252, de déduire l'équation de cette normale de celle de la tangente. Pour cela, il suffit de renverser la fraction qui multiplie $x - x'$ dans l'équation (182), et de la prendre négativement, et l'on trouvera Fig. 101.

$$y - y' = \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x'), \ldots (186),$$ *équation de la normale au point x', y', l'origine étant au centre.*

Il ne faut pas confondre les équations de la tangente et de la normale avec ce qu'on appelle la *tangente* et la *normale* : la ligne dont on donne l'équation a une grandeur indéfinie, tandis que la tangente et la normale sont des droites dont la longueur est déterminée. Ainsi la tangente au point M (*fig.* 101) est la droite MT, qui s'étend hors de la courbe depuis le point de contact jusque sur le prolongement de l'axe des x, et la normale au même point est la droite MR, qui, perpendiculaire à la tangente au point de contact, s'étend depuis ce point jusqu'à la rencontre de l'axe des x dans l'intérieur de la courbe. Fig. 101.

283. La partie PT (*fig.* 101) de l'axe des abscisses, comprise entre le pied P de l'ordonnée du point de contact et le point T où la tangente rencontre l'axe des abscisses, porte le nom de *sous-tangente*. Fig. 101.

Fig. 101. Pour la déterminer, cherchons d'abord la valeur OT (*fig.* 101) de l'abscisse où la tangente MT rencontre l'axe des x; pour cela, il suffira de faire $y = 0$ dans l'équation (185), qui nous donnera

$$x = \frac{a^2}{x'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (187)$$

Maintenant, si de OT nous retranchons l'abscisse OP $= x'$ du point M, nous aurons, pour la sous-tangente,

$$\text{PT} = \frac{a^2}{x'} - x',$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$\textit{sous-tangente} = \frac{a^2 - x'^2}{x'} \quad \ldots\ldots\ldots (188)$$

Fig. 101. 284. La partie PR (*fig.* 101) de l'axe des abscisses comprise entre le pied P de l'ordonnée PM et le point R où la normale rencontre l'axe des abscisses, porte le nom de *sous-normale* (*). Nous la déduirons facilement de l'équation de la normale; car en faisant $y = 0$ dans l'équation (186), pour avoir l'abscisse x du point où la normale rencontre l'axe des x, nous obtiendrons, en effaçant y' des deux membres,

$$-x' = \frac{a^2}{b^2}(x - x'),$$

et par conséquent

$$x' - x = \frac{b^2}{a^2}x'.$$

Or l'abscisse x étant celle du point R, où $y = 0$ dans l'équation de la normale, et x' étant l'abscisse OP du point M, on

(*) Par cette définition et celle de la sous-tangente, on voit que la sous-tangente et la sous-normale sont les projections de la tangente et de la normale sur l'axe des abscisses.

voit que la différence $x' - x$ ne sera autre chose que la sous-normale RP; par conséquent nous aurons

$$\textit{sous-normale} = \frac{b^2}{a^2}x', \quad \ldots\ldots \quad (189)$$

l'origine étant au centre.

285. Les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale nous feront connaître facilement celles de la tangente MT (*fig.* 100) et de la normale MR; car la tangente et la normale étant les hypoténuses des triangles rectangles PMT, RMP, on a Fig. 100.

$$\textit{expression de la tang.} = \sqrt{(\text{sous-tang.})^2 + (\text{ordon.})^2},$$

$$\textit{expression de la norm.} = \sqrt{(\text{sous-norm.})^2 + (\text{ordon.})^2};$$

et en mettant les valeurs indiquées, on trouve, l'*origine de l'ellipse étant au centre*,

$$\textit{express. de la tang. de l'ellipse} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x'^2}{x'}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)},$$

$$\textit{express. de la norm. de l'ellipse} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4}x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)}.$$

286. L'équation (187) nous fournit le moyen de mener une tangente à un point M l'ellipse. En effet, si sur le demi-grand axe a l'on décrit la demi-circonférence ANB (*fig.* 102), et qu'après avoir prolongé l'ordonnée PM jusqu'en N, on mène à ce point le rayon ON, on tirera de l'équation (187) réduite en proportion Fig. 102.

$$\text{OP} : \text{ON} :: \text{ON} : \text{OT},$$

ou

$$x' : a :: a : \text{OT},$$

ce qui donnera, conformément à la formule (187),

$$\text{OT} = \frac{a^2}{x'}.$$

Par ce moyen, on aura deux points de la tangente à l'ellipse, savoir, T et le point M de contact; par conséquent, en unissant ces points par une droite MT, on déterminera la position de la tangente à l'ellipse.

On peut encore mener une tangente à l'ellipse par le procédé suivant :

287. Lorsque le point M est donné sur l'ellipse, on mènera
Fig. 103. à ce point du foyer F′ (*fig.* 103) une droite F′M qu'on prolongera jusqu'en G, en faisant

$$MG = MF,$$

et, ayant uni les points F et G par une droite FG, la perpendiculaire MI, abaissée du point de contact M, sera tangente en M. Pour le démontrer, on va prouver que tout autre point N pris sur la tangente ne peut appartenir à la courbe : en effet, il suit de l'égalité des lignes MF, MG, celle des triangles rectangles FMI, IMG; d'où il résulte que $FI = IG$, et que les triangles FNI, ING sont aussi égaux, et qu'on a

$$NF = NG.$$

Cela posé, je dis que MI ne peut toucher la courbe qu'au point M; car si un autre point, tel que N, était sur la courbe, on aurait

$$F'N + NF = 2a,$$

ou

$$F'N + NG = F'G;$$

équation qui ne peut avoir lieu tant que le triangle F′NG subsiste; car la ligne brisée surpasse la ligne droite.

288. Lorsque le point N est donné hors de l'ellipse, on
Fig. 103. décrira (*fig.* 103) du foyer F′ comme centre, et avec un rayon égal à $2a$, un arc de cercle qui coupera en G un autre arc de cercle décrit du centre N avec un rayon NF. Le point M, déterminé par la rencontre de F′G et de la courbe, sera le point de contact; car cette construction nous donne

$$NG = NF;$$

et par ce que $F'G = 2a$, on doit avoir

$$MG = MF:$$

donc NI, à cause des obliques égales, est perpendiculaire sur GF, et par conséquent est une tangente en M.

289. Dans l'ellipse, les droites FM, F′M, menées des foyers F et F′ au point de contact, forment des angles égaux avec la tangente. En effet (*fig.* 103), l'égalité des triangles IMF′, GMI prouve celle des angles FMI, IMG; ce dernier étant égal à son opposé au sommet F′MN, il en résulte que RMI = F′MN. Fig. 103.

290. La normale RM (*fig.* 101) partage l'angle FMF′ en deux parties égales; car si des angles droits RMN, RMT, on retranche les angles égaux F′MN, FMT, il restera F′MR = FMR. Fig. 101.

CHAPITRE XV.

De l'hyperbole.

291. Il existe une grande analogie entre l'ellipse et une courbe qu'on appelle *hyperbole*, et dont l'équation ne diffère que par les signes; aussi la propriété suivante de l'hyperbole est-elle en quelque sorte l'inverse de celle de l'ellipse (art. 260).

L'hyperbole est une ligne courbe dont la différence des distances de chaque point à deux points fixes est toujours égale à une constante $2a$.

Pour trouver l'équation de cette courbe, représentons par $2c$ la distance des deux points fixes F et F′ (*fig.* 104) : puisque la ligne est courbe, tous ses points ne peuvent être dans la même direction; donc elle doit avoir des points hors de celle de FF′. Et si de M, l'un de ces points, on mène les droites MF, MF′, le triangle MFF′ aura nécessairement lieu : par conséquent, la ligne donnée $2a$ doit être telle que le triangle MFF′ soit possible, ce qui exige que $2a$ soit moindre que FF′ : car, si 1° l'on avait $2a = 2c$, comme, par hypothèse, Fig. 104.

$$2a = MF' - MF,$$

et

$$2c = FF',$$

on conclurait que

$$MF' - MF = FF';$$

d'où l'on tirerait

$$MF' = FF' + MF,$$

ce qui nous conduirait à cette absurdité, que la somme des deux côtés d'un triangle est égale au troisième.

D'une autre part, il serait absurde de supposer $2c < 2a$: car en mettant les valeurs de $2a$ et de $2c$, on aurait

$$FF' < MF' - MF,$$

ou

$$FF' + MF < MF';$$

et il en résulterait que les droites FF′ et MF, qui partent des extrémités F′ et M, ne pourraient se rencontrer, puisque leur somme serait moindre que la droite qui les sépare. Nous supposerons donc

$$2a < 2c. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (190)$$

Cela posé, prenons le milieu O de FF′ pour origine; abaissons du point M une perpendiculaire MP sur la direction de FF′, et nommons

$$OP,\ x;\quad PM,\ y;\quad F'M,\ z';\quad FM,\ z:$$

par la propriété du carré de l'hypoténuse, les triangles rectangles F′MP, FMP, donneront les équations

$$F'M^2 = (OP + OF')^2 + PM^2,$$

ou

$$z'^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (191).$$

$$FM^2 = (OP - OF)^2 + PM^2,$$

ou

$$z^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (192)$$

et la condition du problème nous offrira celle-ci :

$$z' - z = 2a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

Retranchant l'équation (192) de l'équation (191), et rédui-

sant, on obtiendra

$$z'^2 - z^2 = 4cx;$$

et observant qu'en général une expression de la forme $a^2 - b^2$ résulte du produit de $a + b$ par $a - b$, on pourra écrire ainsi cette équation

$$(z' + z)(z' - z) = 4cx;$$

et, en y mettant la valeur de $z' - z$ donnée par l'équation (193), on aura

$$2a(z' + z) = 4cx;$$

et, en divisant par $2a$,

$$z' + z = \frac{2cx}{a}.$$

Ajoutant l'équation (193) à celle-ci, on trouvera

$$2z' = 2a + \frac{2cx}{a},$$

et, par conséquent,

$$z' = a + \frac{cx}{a}.$$

Substituant cette valeur de z' dans l'équation (191), et réduisant, on obtiendra

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2;$$

d'où l'on tirera

$$y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2 - x^2,$$

et, réduisant au même dénominateur le second membre,

$$y^2 = \frac{a^4 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2}{a^2} = \frac{(c^2 - a^2)x^2 - a^2(c^2 - a^2)}{a^2},$$

et, par conséquent,

$$y^2 = \frac{(c^2 - a^2)}{a^2}(x^2 - a^2)\ (*); \ldots\ldots (194)$$

telle est l'équation d'une hyperbole dont $2a$ est le grand axe et $2c$ l'excentricité.

292. Si nous observons que dans cette équation $c^2 - a^2$ revient au produit $(c + a)(c - a)$, et qu'en prenant une moyenne proportionnelle b entre $c + a$ et $c - a$, la proportion

$$c + a : b :: b : c - a$$

nous donne

$$(c + a)(c - a) = b^2,$$

ou

$$c^2 - a^2 = b^2 \ldots\ldots\ldots (195)$$

Nous pourrons, en opérant comme dans l'ellipse, remplacer dans l'équation (194) $c^2 - a^2$ par b^2, et nous aurons

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \ldots\ldots\ldots (196)$$

ou, en chassant le dénominateur, changeant les signes et faisant passer les inconnues dans le premier membre,

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2, \ldots\ldots (197)$$ *équation de l'hyperbole rapportée au centre.*

293. La constante a qui entre dans cette équation représente la ligne OB (*fig.* 105), qui répond à $y = 0$; car, dans cette hypothèse, notre équation se réduit à

Fig 105.

$$b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

(*) Nous avons écrit $c^2 - a^2$ au lieu de $a^2 - c^2$, parce qu'en vertu de l'inégalité (190), nous avons prouvé que c surpassait a dans l'hyperbole; ce qui est le contraire dans l'ellipse.

et, en divisant par b^2, devient

$$x^2 = a^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \pm a.$$

Mais on ne peut pas dire de même que la constante b représente une ligne déterminée dans la courbe, car l'hypothèse de $x = 0$ donne

$$y = \pm \sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1},$$

et, par conséquent, l'ordonnée qui répond à $x = 0$ est imaginaire. Ainsi, le double de cette ordonnée, qui est le petit axe est aussi imaginaire.

294. Quoique, d'après ce qui précède, l'hyperbole n'ait point de petit axe, on est cependant convenu, par analogie avec l'ellipse, d'appeler la constante $2b$ le petit axe de l'hyperbole, quoique le vrai petit axe soit

$$2b\sqrt{-1};$$

au reste, l'équation (196) prouve que depuis A jusqu'à B il n'existe aucune ordonnée. En effet, en résolvant cette équation, on trouve

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \ldots\ldots \quad (198)$$

et l'on voit qu'en donnant à x ou à $-x$ des valeurs moindres que a, l'ordonnée est imaginaire. Ainsi, en prenant deux abscisses OB et OA (*fig.* 105) égales à a, il n'y a point de courbe entre A et B. Ces points sont les sommets de l'hyperbole. Fig. 105.

Si l'on donne ensuite à x des valeurs au-dessus de a, on voit que plus x croîtra, plus l'ordonnée sera grande; et comme cette ordonnée a deux valeurs égales et de signes contraires, la courbe étendra donc jusqu'à l'infini les deux branches BC et BE.

Enfin, si l'on donne à x des valeurs négatives au-dessus

de a, le même raisonnement prouvera que la courbe étend aussi jusqu'à l'infini les deux branches AC′ et AE′.

295. L'équation (196) de l'hyperbole étant donnée, il est facile de déterminer les foyers. En effet, ayant élevé par le centre O
Fig. 105. une perpendiculaire OD (*fig.* 105) égale à b (*), si, avec un rayon OF égal à l'hypoténuse DB, on décrit du centre O des arcs de cercle qui coupent l'axe des abscisses en deux points, F et F′, ces points seront les foyers; car la propriété du carré de l'hypoténuse nous donnera

$$BD^2 = OB^2 + OD^2,$$

ou

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

d'où l'on tire

$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

valeur qui, conformément à l'équation (195) (art. **292**), exprime la distance de l'un des foyers au centre O de la courbe, et, par conséquent, détermine ce foyer.

296. Ayant trouvé les foyers par l'article précédent, il est facile, comme dans l'ellipse, de décrire l'hyperbole par points:
Fig. 106. pour cela, on décrira de l'un des foyers (*fig.* 106) un arc de cercle avec un rayon plus grand que F′B d'une quantité arbitraire m; et de l'autre foyer, on décrira un autre arc avec un rayon FB + m. Ces arcs, dans leurs intersections, détermineront deux points de l'hyperbole; car la différence de ces rayons qui partent des foyers est évidemment égale à

$$F'B - FB = 2a.$$

297. On peut aussi tracer l'hyperbole par un mouvement continu, de la manière suivante :

(*) Toute la différence que nous offrent les deux courbes à l'égard de b, c'est que b dans l'ellipse est une ordonnée, tandis que b, dans l'hyperbole, n'est qu'une constante, au lieu d'être une des coordonnées.

Deux points F′ et F étant pris pour foyers (*fig.* 106), si l'on fixe à l'un de ces points F′ une règle mobile F′H, et à l'autre F un fil moins long que cette règle, et attaché par son autre extrémité à celle de la règle, au point H; si l'on fait mouvoir un style qui, en se rapprochant de B, tienne le fil constamment tendu et appliqué contre MH, la partie MF de ce fil diminuera d'autant que l'autre partie MH s'augmentera. Le style, dans ce mouvement, décrira une portion d'hyperbole. Fig. 106.

En effet, soit $2a$ la différence de la règle au fil : quel que soit le point M de la courbe ainsi tracée, si, de la longueur de la règle

$$= F'M + MH,$$

on ôte celle du fil

$$= FM + MH,$$

il restera $$F'M - FM = 2a,$$

ce qui est la propriété de l'hyperbole.

298. On démontre, comme dans l'ellipse, que les foyers sont les seuls points de la surface de l'hyperbole dont la distance à un autre point pris sur la courbe est exprimée en fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

Pour cet effet, soient α, β et x, y les coordonnées de deux points N et M (*fig.* 107), le premier, pris dans l'intérieur de l'hyperbole, et l'autre sur la courbe; leur distance z sera donnée (art. **235**) par l'équation Fig. 107.

$$z^2 = (x^2 - \alpha)^2 + (y - \beta)^2;$$

développant les carrés du second membre, on aura

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2y\beta + \beta^2;$$

remplaçant y et y^2 par leurs valeurs tirées de l'équation (196) de l'hyperbole, nous trouverons

$$z^2 = \alpha^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \mp 2\beta\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} + \beta^2;$$

disposons de β en l'égalant à zéro, pour délivrer la valeur de z^2 de sa partie irrationnelle, il restera

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2;$$

mais il ne suffit pas que z^2 soit rationnel, il faut encore que z le soit. C'est à quoi nous parviendrons en disposant de l'abscisse α de manière que la valeur de z^2 soit un carré parfait. Opérant donc comme nous

l'avons fait pour l'ellipse (art. **267**, page 161), et réduisant les termes en x^2 au même dénominateur, nous trouverons

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - b^2;$$

éliminant $a^2 + b^2$ à l'aide de l'équation (195), il viendra

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2\alpha x + \alpha^2 - b^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Remplaçant le terme $2\alpha x$ par $\frac{2cx}{a} \times \frac{a\alpha}{c}$, l'équation précédente prendra cette forme

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{2cx}{a} \times \frac{a\alpha}{c} + \alpha^2 - b^2, \quad \ldots\ldots \quad (200)$$

et l'on voit qu'elle deviendra un carré parfait si l'on a

$$\frac{a^2 \alpha^2}{c^2} = \alpha^2 - b^2;$$

on tire de là $\qquad (c^2 - a^2)\,\alpha^2 = b^2 c^2.$

Éliminant $c^2 - a^2$ à l'aide de l'équation (195), supprimant ensuite le facteur commun b^2, et passant à la racine, on obtient

$$\alpha = \pm c.$$

299. L'ordonnée β étant nulle, le point cherché est sur l'axe des abscisses: par conséquent, ce sont ces deux valeurs de α qui vont nous faire trouver le point cherché. Or la valeur positive c nous indique la distance du centre au foyer F, et la valeur négative $-c$ nous indique la distance du centre au foyer F′, de sorte que ce sont ces deux foyers qui résolvent le problème.

Si l'on met ensuite la valeur positive de α dans l'équation (199), nous trouverons

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + c^2 - b^2,$$

et au moyen de la relation (195), cette équation se réduira à

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (201)$$

passant à la racine, et observant que c et x sont plus grands que a, nous aurons aussi

$$z = \frac{cx}{a} - a$$

pour la distance du foyer F à la courbe.

Mettant de même la seconde valeur $-c$ de α dans l'équation (199),

et remplaçant $c^2 - b^2$ par a^2, nous aurons, en passant à la racine,

$$z = \frac{cx}{a} + a$$

pour la distance du foyer F' à la courbe. Ce qui s'accorde avec les valeurs de z et de z' de l'art. **291**.

300. On peut rapporter la courbe à l'un des sommets A et B. Pour cet effet, nommons x' l'abscisse du point M (*fig.* 105) comptée du sommet, nous aurons pour le sommet A Fig. 105.

$$OP = AP - AO,$$

ou

$$x = x' - a,$$

et en représentant par x'' l'abscisse comptée du sommet B,

$$OP = BP + OB,$$

ou

$$x = x'' + a;$$

ces valeurs, étant mises successivement dans l'équation (196) de l'hyperbole, et en nommant y' et y'' les ordonnées qui s'y rapportent, nous donnent

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - 2ax'), \quad \ldots\ldots (202)$$

équation de l'hyperbole rapportée au sommet A,

et $$y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(x''^2 + 2ax''), \ldots (203),$$ *équation de l'hyperbole rapportée au sommet* B.

301. Si, dans l'équation (197) de l'hyperbole rapportée au centre, on fait $b = a$, on tombe sur l'équation $y^2 = x^2 - a^2$ d'une hyperbole à laquelle on a donné le nom d'*hyperbole équilatère*.

En comparant les équations de l'ellipse, de l'hyperbole, du cercle et de l'hyperbole équilatère, on voit que l'hyperbole équilatère est, parmi les hyperboles, ce que le cercle est parmi les ellipses.

302. Soient α, β et α', β' les coordonnées des deux points M et M' (*fig.* [illegible]) l'hyperbole; on aura, entre ces coordon- Fig. 105.

nées, les relations suivantes :

$$6^2 = \frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - a^2),$$

$$6'^2 = \frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2);$$

d'où l'on tirera la proportion

$$6^2 : 6'^2 :: \frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - a^2) : \frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2),$$

ou, en supprimant $\frac{b^2}{a^2}$ dans le second rapport, on aura

$$6^2 : 6'^2 :: \alpha^2 - a^2 : \alpha'^2 - a^2,$$

ou $6^2 : 6'^2 :: (\alpha + a)(\alpha - a) : (\alpha' + a)(\alpha' - a)$,

c'est-à-dire

$PM^2 : P'M'^2 :: (OP + AO)(OP - OB) : (OP' + AO)(OP' - OB)$,

ou $PM^2 : P'M'^2 :: AP \times BP : AP' \times BP'$.

Par conséquent, dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, les *carrés de deux ordonnées sont, entre eux, comme le produit des distances des pieds de ces ordonnées aux sommets* (*), *qui, dans l'hyperbole, sont d'un même côté de la courbe.*

303. Lorsque l'origine des abscisses est la même dans l'ellipse et dans l'hyperbole, pour déduire de l'équation de l'une de ces courbes celle de l'autre, il suffit de changer b^2 en $-b^2$ et b en $b\sqrt{-1}$; c'est une suite de la comparaison que l'on peut établir entre les équations de ces courbes.

304. Le paramètre $2p$ ou la double ordonnée qui passe par

(*) Cette propriété pourra, comme nous l'avons vu dans la note de l'art. **272**, nous fournir le moyen de construire l'hyperbole par points, lorsque, outre le grand axe, deux coordonnées α, 6 et une abscisse α' seront données.

le foyer, se déterminera, en substituant à x et à y' dans l'équation (197) de l'hyperbole rapportée au centre, l'abscisse c et l'ordonnée p du foyer, et l'on trouvera

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2);$$

remplaçant $c^2 - a^2$ par b^2 (art. 292, équat. 195), et tirant la racine, cette équation donnera

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (204)$$

ou, en multipliant le premier terme du second membre par 2, et le second par $\frac{2}{2}$, qui a la même valeur, on trouvera

$$2p = \frac{2b^2}{2a} = \frac{2b \times 2b}{2a};$$

donc, dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, *le paramètre est une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe.*

305. Enfin, si l'on substitue la valeur $\frac{p}{a}$ de $\frac{b^2}{a^2}$ tirée de l'équation (204) dans celle (196) de l'hyperbole, on trouvera

$$y^2 = \frac{p}{a}(x^2 - a^2), \textit{ équation au paramètre.}$$

306. L'équation (204) peut servir à trouver la constante b lorsque le demi-grand axe et le foyer sont donnés; car en ayant élevé une ordonnée en F, nous connaîtrons a et p dans la proportion

$$a : b :: b : p,$$

tirée de l'équation (204); et en prenant une moyenne proportionnelle entre a et p, on aura une ligne égale à b, mais qui ne déterminera aucun point de la courbe (art. 293).

307. Pour trouver l'équation de la tangente, cherchons préliminairement celle de la sécante M′S (*fig.* 108), formée par le prolongement de la corde M′M″; et soient x', y' et x'', y'' Fig. 108.

les coordonnées des points M′ et M″. Cette sécante n'étant autre chose qu'une droite assujettie à passer par les points M′ et M″, nous déterminerons son équation au moyen de la formule (1[illegible]) (page 126), dans laquelle nous substituerons x', y' et x'', y'' aux coordonnées α, β et α', β', et nous aurons

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'), \ldots (205),$$ *équation de la sécante* M′S.

Les points M′ et M″ appartenant, par hypothèse, à l'hyperbole, l'équation (197) sera satisfaite par les coordonnées de ces points ; nous aurons donc

$$b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^2 b^2, \quad b^2 x''^2 - a^2 y''^2 = a^2 b^2;$$

retranchant l'une de ces équations de l'autre, on obtiendra

$$b^2(x''^2 - x'^2) - a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

équation qui revient à

$$b^2(x'' + x')(x'' - x') - a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

et qui donne

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{b^2}{a^2}\frac{(x' + x'')}{y'' + y'};$$

cette valeur étant mise dans l'équation (205), on a

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{(x'' + x')}{y'' + y'}(x - x'). \ldots (206)$$

Lorsque la corde M′M″ devient tangente à l'hyperbole, les points M′ et M″ coïncident, et par conséquent

$$x' = x'', \quad y' = y'';$$

et l'expression $\frac{x'' + x'}{y'' + y'}$ se réduit à $\frac{x'}{y'}$, en supprimant le facteur commun 2. Dans ce cas l'équation (206) de la sécante,

convertie en celle de la tangente au point M, où coïncident M′ et M″, devient

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x'), \ldots (207),$$ *équation de la tangente en* M *à l'hyperbole.*

308. L'équation d'une droite assujettie à passer par un point étant donnée par la formule (134) (page 125),

$$y - \beta = a(x - \alpha),$$

dans laquelle a représente la tangente trigonométrique de l'angle qui résulte de la rencontre de cette droite avec l'axe des x, par la comparaison de l'équation (207) à cette formule, on obtient

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'} = \textit{tangente trig. de l'angle } \mathrm{T}$$

formé par la tangente MT *à l'hyperbole avec l'axe des abscisses.*

Cette valeur n'étant point affectée du double signe, on voit que, dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, on ne peut mener qu'une tangente au point de contact.

Aux points B et A où $y' = 0$, on a, dans le premier cas, $x = a$, et dans le second, $x' = -a$. Ces valeurs mises successivement dans celle de la tang trig. de l'angle T, donnent tang $\mathrm{T} = \infty$, ce qui montre qu'en ces points la tangente devient perpendiculaire à l'axe des abscisses.

309. L'équation (207) peut se mettre, comme on l'a fait pour l'ellipse, sous une forme plus symétrique, en chassant le dénominateur $a^2 y'$ et en rassemblant les termes affectés de x et de y, dans le premier membre; on a alors

$$b^2 x' x - a^2 y' y = b^2 x'^2 - a^2 y'^2 :$$

réduisant le second membre au moyen de la relation (197), il reste

$$b^2 x' x - a^2 y' y = a^2 b^2 \ldots\ldots (208)$$

Fig 109. **310.** Quand $y = 0$, l'équation (208) donne (*fig.* 109) pour l'abscisse x du point T où la tangente à l'hyperbole rencontre l'axe des abscisses

$$\mathrm{OT} = \frac{a^2}{x'}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (209)$$

valeur qui se détermine par le quatrième terme de cette proportion

$$x' : a :: a : \mathrm{OT}.$$

Par conséquent, au moyen du demi-grand axe et de l'abscisse x', du point M de tangence, il sera facile de mener une tangente à ce point.

311. On peut aussi mener une tangente à un point de l'hyperbole par un procédé graphique analogue à celui qu'on a employé pour l'ellipse.

Fig. 109. En effet, lorsque le point M (*fig.* 109) est donné sur l'hyperbole, on porte la longueur de FM, le plus court des rayons vecteurs, sur la direction de l'autre, de M en G; et, ayant uni les points G et F par une droite GF, on abaisse du point M sur cette droite, la perpendiculaire MI qui sera tangente à l'hyperbole.

Car, soit un point N pris sur la direction de MI : après avoir prouvé, comme dans l'ellipse, que NG = NF, en se fondant sur l'égalité des lignes GM et MF, si N était sur la courbe, on devrait avoir

$$\mathrm{F'N} - \mathrm{NF} = 2a,$$

ou

$$\mathrm{F'N} - \mathrm{NG} = \mathrm{F'G},$$

d'où l'on tirerait

$$\mathrm{F'N} = \mathrm{NG} + \mathrm{F'G},$$

équation absurde si le triangle GNF′ existe, c'est-à-dire si M diffère de N.

Lorsque le point N par lequel on veut mener une tangente
Fig. 109 à l'hyperbole n'est pas donné sur la courbe (*fig.* 109), si du foyer F′ pris pour centre, et avec un rayon $2a$, on décrit

un arc de cercle qui coupe en G un autre arc décrit du point donné N avec NF pour rayon, le point M déterminé par le prolongement de F'G sera le point de tangence; car il serait facile de démontrer, comme dans l'art. 288, que NM est une perpendiculaire sur GF, puisqu'on a, par construction, NG = NF, et par la nature de la courbe, Fig. 109.

$$MF' - MF = 2a = GM.$$

312. La perpendiculaire MR au point de contact (*fig.* 110) est, comme dans l'ellipse, ce qu'on appelle une *normale à l'hyperbole;* l'équation de cette ligne se déduit de celle de la tangente en renversant la fraction qui multiplie $x - x'$ dans l'équation (207), et en prenant cette fraction négativement (art. 232). On a, par ce procédé, Fig. 110.

$$y - y' = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x') \ldots (210),$$ *équation de la normale au point x' y' de l'hyperbole, l'origine étant au centre.*

313. Pour déterminer la sous-tangente PT à l'hyperbole, nous ferons $y = 0$ dans l'équation (208), ce qui nous donnera pour la valeur OT de x

$$OT = \frac{a^2}{x'};$$

la sous-tangente PT étant égale à OP — OT (*fig.* 110), comme OP n'est autre chose que l'abscisse x' du point M, nous aurons Fig. 110.

$$PT = x' - \frac{a^2}{x'},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\textit{sous-tangente} = \frac{x'^2 - a^2}{x'}, \ldots (211),$$ *l'origine étant au centre.*

Fig. 110. **314.** A l'égard de la sous-normale, cette ligne (*fig.* 110) étant la différence RP des abscisses OR et OP, la valeur de la première sera déterminée par l'abscisse x qui correspondra à $y = 0$, dans l'équation (210) de la normale; dans cette hypothèse, cette équation se réduit à

$$-y' = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x');$$

supprimant le signe négatif, effaçant le facteur commun y', on tire de là

$$x - x' = \frac{b^2}{a^2}x';$$

et comme $x - x'$ n'est autre chose que OR — OP (*fig.* 110), nous avons donc

$$\textit{sous-normale de l'hyperbole} = \frac{b^2}{a^2}x'.$$

315. Les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale nous donnent pour celle de la tangente et de la normale à l'hyperbole, en opérant comme dans l'art. **285**,

$$\textit{express. de la tang. de l'hyp.} = \sqrt{\left(\frac{x'^2 - a^2}{x'}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)},$$

$$\textit{express. de la norm. de l'hyp.} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4}x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)}.$$

Fig 109. **316.** Dans l'hyperbole, les lignes FM, F'M menées des foyers au point de contact (*fig.* 109), forment des angles égaux avec la tangente. En effet, MI par construction (art. **311**), étant perpendiculaire sur GF, les triangles rectangles GMI, FMI, qui ont des côtés égaux GM et MF, et un côté commun, sont égaux; par conséquent l'angle FMT est égal à l'angle F'MT.

Il suit de ce qui précède, que la tangente MT à l'hyperbole partage l'angle FMF′ des rayons vecteurs FM, F′M en deux parties égales.

CHAPITRE XVI.

De la parabole.

317. La parabole est une courbe dont chaque point M jouit de cette propriété, que sa distance à un point fixe, appelé le *foyer*, est toujours égale à la perpendiculaire MG (*fig.* 111) abaissée de M sur la droite SV, qui porte le nom de *directrice*. Fig. 111.

Le foyer F et la directrice SV (*fig.* 111) étant donnés, menons par le point F une perpendiculaire FD sur la directrice, et partageons FD en deux parties égales au point A, ce point appartiendra à la parabole; car on aura AF = AD. Ce point A étant pris pour origine, plaçons l'axe des abscisses sur la direction de AF, et imaginons que la courbe soit construite : il suit de la définition que nous venons de donner, qu'une perpendiculaire MG abaissée du point M sur la directrice sera égale au rayon vecteur FM, c'est-à-dire qu'on aura Fig. 111.

$$FM = MG; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (212)$$

désignons par x l'abscisse AP, et par k la distance AF du sommet au foyer, nous aurons aussi $AD = k$, puisque DF a été partagé en deux parties égales au point A. Or $MG = DP$, comme parallèles comprises entre parallèles; par conséquent

$$MG = AD + AP = k + x;$$

d'un autre côté, le triangle rectangle FMP donne

$$FM^2 = FP^2 + PM^2,$$

ou $$FM^2 = (AP - AF)^2 + PM^2 = (x - k)^2 + y^2.$$

En vertu de l'équation (212), égalons cette valeur analytique de FM² au carré de GM, nous trouverons, en développant,

$$x^2 - 2kx + k^2 + y^2 = k^2 + 2kx + x^2,$$

et nous obtiendrons, en réduisant,

$$y^2 = 4kx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (213)$$

318. Au lieu de la constante k on peut introduire, dans cette équation, l'ordonnée $HF = p$ (*fig.* 111) qui passe par le foyer; cette ordonnée, d'après la propriété de la courbe, est égale à HL, et par conséquent à $DF = 2k$. Remplaçant donc $2k$ par p dans l'équation (213), on aura

$$y^2 = 2px. \ldots, \quad (214), \quad \textit{équation de la parabole.}$$

319. Le paramètre $2p$, comme dans l'ellipse et l'hyperbole, étant le double de l'ordonnée qui passe par le foyer, si l'on remplace $4k$ par $2p$ dans l'équation (213), qui est la même que l'équation (214), on a donc

$$\textit{paramètre} = 4k;$$

ce qui montre que le paramètre est le quadruple de la distance k du sommet au foyer.

320. L'équation (210) étant résolue, nous donne

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Le double signe nous indique que y a toujours deux valeurs égales, l'une positive et l'autre négative, ce qui montre que la courbe est coupée en deux parties égales par l'axe des abscisses; et comme, à mesure que l'abscisse x s'accroît, l'ordonnée y s'accroît aussi, on voit que la courbe prolonge jusqu'à l'infini deux branches égales AC, AC′, qui vont toujours en s'écartant de l'axe des x, car x, en s'accroissant, fait augmenter la valeur de y. La courbe ne s'étend pas, comme l'hyperbole, dans la partie négative de l'axe des abscisses, car en faisant x négatif, la valeur de y devient imaginaire.

321. Ce n'est pas que la parabole ne puisse être tournée dans le sens de la figure 112; mais alors l'abscisse $AF' = k$ du foyer est négative, aussi bien que l'abscisse $AP' = x$; par conséquent, le produit kx de ces deux quantités négatives redevient positif, et y n'est plus imaginaire. Dans ce cas, la courbe ne s'étend pas au delà du point A dans le sens des abscisses positives; car en faisant x positif, comme cette abscisse se trouve multipliée par l'abscisse $-k$ du foyer, $4kx$ est une quantité négative, et la valeur de y est imaginaire. Fig. 112.

322. L'équation (212) nous offre un moyen de décrire la parabole par points. Pour cet effet, on prendra (*fig.* 111) Fig. 111.

$$AD = AF = k,$$

et ayant élevé une perpendiculaire indéfinie PM (*fig.* 111), on la coupera en M par un arc de cercle décrit du foyer avec un rayon FM égal à DP : alors le point d'intersection M sera sur la courbe; car, d'après cette construction, $FM = DP = GM$. Fig. 111.

323. On peut décrire aussi la parabole par un mouvement continu, de la manière suivante : un fil égal en longueur à la branche GR d'une équerre, étant fixé par l'une de ses extrémités à celle de cette branche en R, et par l'autre à un point F que l'on prend pour foyer, si la seconde branche de l'équerre glisse sur la directrice, tandis que le fil, au moyen d'un style, soit constamment tendu contre la branche RG à laquelle il est attaché, ce style décrira la parabole; car on aura toujours

$$GR = FMR, \quad \text{ou} \quad GM + MR = FM + MR,$$

et par conséquent

$$GM = FM.$$

324. On peut, en opérant comme nous l'avons fait lorsque nous avons traité de l'ellipse et de l'hyperbole, démontrer qu'il n'est dans la parabole que le foyer dont la distance à un autre point pris sur la courbe soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

Pour cet effet, désignons par α et β les coordonnées d'un point pris

sur la surface de la parabole, et par x et y celles d'un point de la courbe. La distance z de ces deux points sera exprimée (art. **235**, équat. 140) par l'équation

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

et en développant, on aura

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 :$$

remplaçant y^2 par $2px$ et y par $\pm\sqrt{2px}$, cette équation deviendra

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 2px \mp 2\beta\sqrt{2px} + \beta^2 = 0 ;$$

disposant de β pour que cette valeur de z^2 soit rationnelle, nous ferons $\beta = 0$, et l'équation se réduira à

$$z^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 2px = 0 ;$$

mais il ne suffit pas que la valeur de z^2 soit rationnelle, il faut encore, d'après la condition du problème, que celle de z le soit, ce qui exige qu'on ait dans le second membre de cette équation un carré parfait. C'est à quoi on parviendra en ordonnant préliminairement par rapport à x ; ce qui permettra de mettre cette équation sous la forme

$$z^2 = x^2 + 2(p - \alpha)x + \alpha^2 ;$$

et l'on voit qu'elle deviendra un carré parfait si, en disposant de α, nous faisons

$$(p - \alpha)^2 = \alpha^2 ;$$

développant le premier membre et réduisant, il restera

$$p^2 - 2p\alpha = 0 ;$$

supprimant le facteur commun, on obtiendra

$$\alpha = \tfrac{1}{2}p,$$

et comme p est la moitié du paramètre, on voit que cette valeur de α qui exprime la distance k du sommet au foyer, est égale au quart du paramètre.

325. L'équation de la parabole nous apprend encore que *les carrés des ordonnées sont comme les abscisses qui répondent à ces ordonnées.*

Car soient α, β et α', β' les coordonnées de deux points : on

a donc, pour le premier,

$$\beta^2 = 2p\alpha;$$

pour le second,

$$\beta'^2 = 2p\alpha':$$

donc

$$\beta^2 : \beta'^2 :: p\alpha : p\alpha',$$

ou, divisant les deux termes du second rapport par $2p$,

$$\beta^2 : \beta'^2 :: \alpha : \alpha'.$$

326. Déterminons maintenant l'équation de la tangente à la parabole. Pour cela, si dans l'équation (137) de la droite assujettie à passer par deux points (art. **222**), on remplace les coordonnées α, β et α', β' de ces points par les coordonnées x', y', x'', y'' des points M′ et M″ (*fig.* 113) où la sécante rencontre la courbe, nous aurons pour l'équation de la sécante M′S, Fig. 113.

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'); \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

les points x', y' et x'', y'' étant sur la parabole, on a

$$y'^2 = 2px', \qquad y''^2 = 2px'';$$

retranchant la première équation de la seconde, il vient

$$y''^2 - y'^2 = 2p(x'' - x'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

et en décomposant le premier membre de cette équation en deux facteurs, on a

$$(y'' - y')(y'' + y') = 2p(x'' - x'),$$

d'où l'on tire

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'};$$

substituant cette valeur dans l'équation (214), nous trouverons

$$y - y' = \frac{2p}{(y'' + y')}(x - x'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Fig. 115. Dans le cas où les points M′ et M″ (*fig.* 115) coïncident, l'ordonnée y'' se confond avec l'ordonnée y', et la sécante M′S se transforme en une tangente MT. Faisant donc $y'' = y'$ dans l'équation (216) de la sécante, on a

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'), \quad . \quad . \quad . (217),$$ *équation de la tangente à la parabole.*

327. Cette équation peut se mettre sous une forme plus élégante; car, en chassant le dénominateur, on obtient

$$yy' - y'^2 = px - px',$$

et en observant que $y'^2 = 2px'$, cette équation se réduit à

$$yy' = p(x + x').$$

328. En comparant l'équation (217) à celle de la ligne droite, dans laquelle nous avons reconnu que le coefficient de x représentait la tangente trigonométrique de l'angle formé par cette droite avec l'axe des y, nous déduirons de l'équation (217),

$$\frac{p}{y'} = \textit{tang. trigon. de l'angle}$$ *formé par la tang. avec l'axe des x.*

En prenant négativement la fraction renversée de l'équation (217), on trouve (art. **232**)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'), \quad . \quad . \quad . (218),$$ *équation de la normale à la parabole.*

Si dans cette équation on fait $y = 0$, x représentera l'abscisse AR du point où la normale rencontre l'axe des x, et par
Fig. 114. conséquent $x - x'$, c'est-à-dire AR — AP (*fig.* 114) sera la sous-normale. Faisant donc $y = 0$, dans l'équation (218), on en tire, en réduisant,

$$x - x' = p,$$

ou $$\textit{sous-normale} = p.$$

La sous-normale nous fera connaître la sous-tangente; car le triangle TMR ayant un angle droit TMR, l'ordonnée est une moyenne proportionnelle entre PR et PT; on a donc

$$\mathrm{PR} : \mathrm{MP} :: \mathrm{MP} : \mathrm{PT},$$

ou

$$p : y' :: y' : \mathrm{PT};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{PT} = \frac{y'^2}{p};$$

remplaçant y'^2 par $2px'$, réduisant et observant que PT n'est autre chose que la sous-tangente, nous avons

$$\textit{sous-tangente} = 2x'.$$

Au moyen de ces valeurs de la sous-tangente et de la sous-normale, les triangles rectangles TMP, MPR nous donneront

$$\sqrt{4x'^2 + y'^2} = \textit{expression de la tangente de la parabole},$$
$$\sqrt{p^2 + y'^2} = \textit{expression de la normale de la parabole}.$$

329. La parabole n'est autre chose que la limite de toutes les ellipses dont la distance du foyer au sommet est la même; en effet, de même que dans les polygones inscrits au cercle, en passant d'un polygone à un autre, on s'approche de plus en plus d'une certaine limite qui est le cercle, de même, dans toutes ces diverses ellipses, on doit tendre à s'approcher d'une limite qui, ainsi que nous allons le reconnaître, est la parabole. Pour cela, nous remarquerons préliminairement que si la distance du foyer au sommet A est représentée, comme dans la parabole, par k, et que cette distance soit la même pour toutes les ellipses que l'on construira en allongeant successivement a, le demi-petit axe s'accroîtra aussi. Pour le prouver, nous avons évidemment (*fig.* 99), Fig. 99.

$$\mathrm{OF}' = \mathrm{AO} - \mathrm{AF}',$$

ou

$$c = a - k;$$

si nous substituons cette valeur dans celle de b^2, fournie (art. **261**) par l'équation (160),

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

nous obtiendrons, en réduisant,

$$b^2 = 2ak - k^2;$$

au moyen de cette équation, si nous éliminons b^2 de celle de l'ellipse rapportée au sommet A (art. **270**), qui est de la forme

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

nous aurons

$$y^2 = \frac{(2ak - k^2)}{a^2}(2ax - x^2),$$

et en développant, on trouvera

$$y^2 = 4kx - \frac{2(k^2x + kx^2)}{a} + \frac{k^2x^2}{a^2},$$

équation qui, dans le cas de la limite, c'est-à-dire lorsque le grand axe devient infini, se réduit à

$$y^2 = 4kx;$$

on reconnaît, dans cette équation, celle de la parabole.

330. La tangente trigonométrique de la tangente au point x',
Fig. 114. y' (*fig.* 114), ayant pour expression (art. **328**) $\frac{p}{y'}$, et l'ordonnée y' pouvant s'accroître depuis o jusqu'à l'infini, on sent que l'angle auquel cette tangente appartient passera par tous les degrés : ainsi, en faisant $y' = 0$, la valeur de $\frac{p}{y'}$ sera, dans cette hypothèse, $\frac{p}{0} = \infty$, ce qui montre qu'au point A
Fig. 114. (*fig.* 114) la tangente est celle d'un angle droit, et qu'à mesure que le dénominateur y' de la fraction $\frac{p}{y'}$ s'accroît,

cette fraction diminue, ainsi que l'angle dont elle exprime la tangente; de sorte que si y' devenait infini, $\frac{p}{y'}$ serait nul, et la tangente deviendrait parallèle à l'axe des abscisses. (*Note douzième.*)

CHAPITRE XVII.

De l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

331. Les tangentes de l'hyperbole nous présentent une particularité remarquable: c'est celle des asymptotes. On appelle ainsi deux lignes qui ne sont tangentes à la courbe qu'à son extrémité infinie. On est conduit aux asymptotes par les considérations suivantes:

Nous avons vu (art. **310**) que la distance de centre de l'hyperbole au point où la tangente rencontre l'axe des x, était donnée par l'équation (**209**). Or la fraction $\frac{a^2}{x'}$, qui entre dans cette équation, nous montre que plus l'abscisse x' du point de contact s'accroît, plus cette fraction, qui est la valeur de OT (*fig.* 110), diminue; de sorte que si l'abscisse x' devient infi- Fig. 110
nie, on a

$$OT = \frac{a^2}{\infty} = 0;$$

donc alors la tangente passe par le centre. Pour en déterminer la position, il faut encore un autre point de sa direction: or, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente de l'hyperbole forme avec l'axe des abscisses étant le coefficient de x dans l'équation de la tangente au point x', y', nous avons (art. **307**)

$$\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

pour l'expression de cette tangente trigonométrique. Si l'on y met la valeur de y' tirée de l'équation de l'hyperbole rapportée au centre (art. **292**), et dans laquelle les coordonnées x et y se changent en x' et y' au point de tangence, cette expression devient

$$\pm \frac{bx'}{a\sqrt{x'^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}},$$

et, lorsque $x' = \infty$, se réduit à

$$\pm \frac{b}{a}.$$

332. Pour construire la première de ces valeurs, on élèvera au sommet B la perpendiculaire $BC = b$ (*fig.* 115), et l'angle BOC aura $\frac{b}{a}$ pour tangente trigonométrique. En effet, le triangle COB, étant comparé à celui des tables, donne la proportion

Fig. 115.

$$OB : BC :: 1 : \text{tang } BOC,$$

ou

$$a : b :: 1 : \text{tang } BOC;$$

donc

$$\text{tang } BOC = \frac{b}{a}.$$

La seconde valeur se déterminera en élevant en B une perpendiculaire $BC' = b$, et les deux lignes indéfinies OC, OC', seront les asymptotes de l'hyperbole.

333. Si l'on demandait les équations des asymptotes, comme ce sont des droites qui, passant par le centre, font avec l'axe des abscisses des angles dont les tangentes trigonométriques ont pour valeurs absolues $\frac{b}{a}$, et que l'une est au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe des abscisses, il est évident que leurs équations sont

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad \ldots\ldots (219)$$

334. Parmi les propriétés remarquables des asymptotes, nous allons démontrer préliminairement que pour toute parallèle EE′ à CC′, le produit des distances ME et ME′ d'un point M aux asymptotes est toujours le même. En effet, l'équation de l'hyperbole étant Fig. 115.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

si nous représentons par y' l'ordonnée EP qui appartient à la même abscisse de la ligne $x =$ OP, nous aurons (art. 207), en vertu de l'équation de la ligne droite qui passe par l'origine O, et qui fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{b}{a}$,

$$y' = \frac{b}{a}x;$$

élevant cette équation au carré et prenant la différence des carrés des ordonnées y' de la ligne droite et y de l'hyperbole, nous aurons

$$y'^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Le second membre de cette équation se réduit à b^2; et quant au premier, en le mettant sous cette forme

$$(y' - y)(y' + y),$$

nous voyons que

$$y' - y = \text{ME}, \quad y' + y = \text{ME}';$$

donc

$$\text{EM} \times \text{E'M} = b^2,$$

c'est-à-dire que le produit des distances d'un point M aux deux asymptotes est toujours égal au carré b^2 de BC.

335. Ce théorème va nous conduire à déterminer la relation remarquable qui existe entre une partie ON de l'asymptote QC et la parallèle NM à l'autre asymptote. Pour l'obtenir, menons (*fig.* 116) par le point B une parallèle BD à l'asymp- Fig. 116.

tote OL′ et la perpendiculaire BC à OB, et par conséquent parallèle à EE′; le triangle BDC étant semblable au triangle MNE, on a la proportion

$$BC : ME :: BD : MN;$$

le même triangle BDC, comparé au triangle ME′G, formé par la parallèle MG à OE, nous donne cette autre proportion

$$BC : ME' :: DC : GM;$$

multipliant par ordre, on trouve

$$BC^2 : ME \times ME' :: BD \times DC : MN \times GM; \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

mais (art. 334),

$$ME \times ME' = b^2 = BC^2;$$

donc la proportion (220) se réduit à

$$1 : 1 :: BD \times DC : MN \times GM,$$

et donne $$MN \times GM = BD \times DC,$$

ou, parce que $GM = ON$, comme côtés opposés d'un parallélogramme,

$$ON \times MN = BD \times DC;$$

nommons ON, x, et MN, y, nous aurons, pour tous les points de l'hyperbole,

$$xy = BD \times DC; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

en sorte qu'en prenant successivement des abscisses sur l'asymptote OL, les ordonnées qui seront obliques et parallèles à la seconde asymptote OL′ détermineront tous les points de l'hyperbole aussi bien que le feraient des ordonnées rectangulaires avec l'équation (197), qui est plus compliquée.

Nous pouvons simplifier encore l'équation (221), car au

point B, pour lequel $x = \mathrm{OD}$ et $y = \mathrm{BD}$, en mettant ces valeurs dans l'équation (221), nous aurons Fig. 116.

$$\mathrm{OD} \times \mathrm{BD} = \mathrm{BD} \times \mathrm{DC};$$

d'où nous pourrons conclure que

$$\mathrm{OD} = \mathrm{DC}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (222)$$

Or le triangle OBC étant rectangle, on peut regarder l'angle droit OBC comme appuyé sur le diamètre OC, et conclure que le point B appartient à la circonférence décrite avec le rayon DC, puisqu'en vertu de l'équation (222), DC est la moitié du diamètre OC.

Il suit de là que DB sera un autre rayon, et qu'on aura

$$\mathrm{BD} = \mathrm{DC}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (223)$$

de sorte que l'équation (221) deviendra

$$x'y' = \mathrm{DC}^2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (224)$$

désignant DC par m, et supprimant les accents, qui deviennent inutiles, puisque nous n'avons point d'autres coordonnées à distinguer, cette équation deviendra

$$xy = m^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (225),$$ *équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes.*

336. La propriété de ces sortes de lignes droites qui accompagnent constamment les deux branches de la courbe, est ici mise en évidence plus que dans l'équation ordinaire de l'hyperbole; car on tire de l'équation (225)

$$y = \frac{m^2}{x};$$

ce qui nous apprend que plus l'abscisse x est grande, plus y diminue; et qu'enfin ce n'est qu'en donnant une valeur infinie à x que y devient nul.

337. La valeur analytique de ce carré, qu'on appelle ordinairement la *puissance de l'hyperbole*, peut être exprimée en
Fig. 117. fonction des axes. En effet, le triangle OCB (*fig.* 117) nous donne

$$OC^2 = OB^2 + BC^2,$$

ou

$$OC^2 = a^2 + b^2;$$

et comme, en vertu de l'équation (222), OD étant égal à DC est la moitié de OC, on peut remplacer OC par 2 DC, et par conséquent OC^2 par $4DC^2$; ce qui convertit l'équation précédente en $4\,DC^2 = a^2 + b^2$, divisant par 4, et la valeur de DC^2 introduite dans l'équation (223), la réduit à

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (226)$$

Fig. 117. **338.** Soit φ (*fig.* 117) l'angle LOL′ formé par les deux asymptotes, si l'on multiplie l'équation précédente par $\sin\varphi$, on aura

$$xy \sin\phi = \frac{a^2 + b^2}{4} \sin\varphi; \quad \ldots\ldots \quad (227)$$

représentant par ON et MN les coordonnées x et y d'un point M pris sur la courbe, le produit $y \sin\varphi = MN \sin\varphi = OG \sin\varphi$ exprimera (art. 85) la perpendiculaire GI qui mesure la hauteur du triangle OGI ou du parallélogramme OGMN, et en multipliant cette hauteur par la base $ON = x$, le produit $xy \sin\varphi$ sera la surface de ce parallélogramme, et l'équation précédente deviendra

$$\textit{surface}\ OGMN = \frac{a^2 + b^2}{4} \sin\varphi.$$

La situation du point x, y sur l'hyperbole étant arbitraire, prenons ce point au sommet B, nous aurons donc

$$\textit{parallélogramme}\ ODBH = \frac{a^2 + b^2}{4} \sin\varphi.$$

Au moyen de cette valeur de $\frac{a^2 + b^2}{4} \sin\varphi$, l'équation (227)

devient

$$xy \sin \varphi = \textit{parallélogramme}\ \text{ODBH};$$

ce qui nous apprend que le parallélogramme formé par les coordonnées est toujours égal au *parallélogramme* ODBH, dont le parallélogramme AEBF est le quadruple.

339. Lorsque l'hyperbole est équilatère (art. **301**), la tangente trig. de l'angle COB représentée par $\frac{b}{a}$, se réduisant à l'unité, est celle de la moitié d'un angle droit; donc l'angle LCL′ formé par les asymptotes est alors droit, et le parallélogramme ODBH devient un carré.

340. L'équation (224), pouvant déterminer tous les points de la courbe en menant des parallèles à l'une des asymptotes, porte le nom d'*équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes;* et, ce qui est très-remarquable, c'est que, hors le cas de l'hyperbole équilatère, les coordonnées x et y sont obliques. Voilà donc un nouveau système de coordonnées dont nous ferons bientôt usage, en parlant des diamètres.

341. L'hyperbole entre ses asymptotes se rapportant à des coordonnées obliques, cherchons à déterminer l'équation de la ligne droite, dans la même hypothèse.

Soient donc (*fig.* 118) Ax et Ay deux axes coordonnés qui forment entre eux un angle yAx qu'on ne suppose plus droit, et qui répond à des ordonnées parallèles à l'axe Ay; il s'agit de trouver le rapport qui existe entre l'abscisse AP $= x$ du point M et l'ordonnée PM parallèle à l'axe Ay. Or MP se compose de deux parties, PQ et MQ; de sorte que nous avons Fig. 118.

$$\text{MP} = \text{MQ} + \text{PQ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (228)$$

A l'égard de PQ′, cette ligne, comme parallèle comprise entre parallèles, est égale à la constante AB, que nous désignerons par b. Il nous reste à déterminer MQ: pour cela,

dans le triangle obliquangle MBQ, les côtés étant proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés (art. **100**), nous avons la proportion

$$BQ : MQ :: \sin M : \sin MBQ;$$

donc
$$MQ = BQ \frac{\sin MBQ}{\sin M}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (229)$$

l'angle M, comme alterne-interne, étant égal à l'angle yBM, nous avons

$$yBM = yBQ - MBQ = BAx - MBQ;$$

désignant par α l'angle MBQ et par β l'angle BAx, qu'on substituera à yBQ, l'équation (228) deviendra

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} x + b. \quad \ldots \quad (230),$$ *équation de la ligne droite dans un système des coordonnées obliques.*

342. Si la droite passe par l'origine, b est nul, et l'on a

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} x. \quad \ldots\ldots \quad (231)$$

343. Enfin, si l'angle yAx est droit,

$$\sin (\beta - \alpha) = \sin (90 - \alpha) = \cos \alpha,$$

et l'équation (230) devient

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x + b,$$

ou
$$y = x^2 \tang \alpha + b;$$

et nous reconnaissons là l'équation ordinaire de la ligne droite.

344. L'équation (230) ne diffère donc de l'équation (132) de la ligne droite (page 122) que par le coefficient de x, qui, au lieu d'être une tangente trig., exprime le rapport de

deux sinus; mais étant de même forme, nous la représenterons par

$$y = Ax + b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

348. Nous allons maintenant nous servir de cette équation pour trouver l'équation de la tangente à l'hyperbole comprise entre ses asymptotes, équation beaucoup plus simple que l'équation ordinaire de la tangente à l'hyperbole.

Pour cela, regardons préliminairement l'équation (232) comme celle d'une sécante qui coupe l'hyperbole rapportée à ses asymptotes (*fig.* 119) aux points M′ et M″, dont les coordonnées sont respectivement x', y' et x'', y''; ces coordonnées satisfaisant à l'équation (232), nous aurons Fig. 119.

$$y' = Ax' + b, \quad y'' = Ax'' + b; \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

la première de ces équations étant retranchée de l'équation (232), nous obtiendrons

$$y - y' = A(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

pour l'équation de la sécante assujettie à passer par le point x', y'; et en retranchant les équations (233) l'une de l'autre, nous déterminerons la valeur de A, qui, introduite dans l'équation (234), nous donnera

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

pour l'équation de la droite assujettie à passer par deux points, comme nous l'avons trouvée dans un système de coordonnées rectangulaires. Cela posé, les coordonnées x', y' devant satisfaire aussi à l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, nous avons

$$x'y' = m^2, \quad x''y'' = m^2;$$

retranchant la seconde de ces équations de la première, on a

$$x'y' - x''y'' = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (236)$$

ajoutant à cette équation la quantité $x'y'' - x'y''$, qui est identiquement nulle, nous convertirons l'équation (236) en celle-ci :

$$x'(y' - y'') + y''(x' - x'') = 0 ;$$

d'où nous tirerons

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{x'}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (235), nous avons, pour l'équation de la sécante,

$$y - y' = -\frac{y''}{x'}(x - x').$$

La sécante devient tangente lorsque les points x', y' et x'', y'' coïncident; dans ce cas le coefficient de $x - x'$ de l'équation (237) devient $-\frac{y'}{x'}$; par conséquent, nous avons

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (237)$$

pour l'équation de la tangente au point x', y' de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

346. Si dans l'équation (237) de la tangente à l'hyperbole entre ses asymptotes, on fait $y = 0$, on trouvera $x = 2x'$;
Fig. 119. ce qui nous apprend que l'abscisse OT (*fig.* 119) du point T, où la tangente rencontre l'asymptote OL prise pour axe des abscisses, est double de l'abscisse OP du point de tangence; donc OP = PT, et comme l'ordonnée PM est parallèle à la seconde asymptote OL′, il en résulte que les triangles OTT′, PMT sont semblables et donnent la proportion

$$\text{OT} : \text{PT} :: \text{T}'\text{T} : \text{MT},$$

ou

$$2 : 1 :: \text{T}'\text{T} : \text{MT};$$

par conséquent, la tangente T′T en un point M est partagée en deux parties égales par les asymptotes.

CHAPITRE XVIII.

Des diamètres en général.

347. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on appelle *diamètre* toute droite qui passe par le centre, et qui, lorsque sa valeur n'est pas imaginaire, comme celle du petit axe de l'hyperbole, se termine de part et d'autre à la courbe.

348. Le diamètre est toujours partagé en deux parties égales OL, OL′ (*fig.* 120) par le centre. Fig. 120.

Voici comment je le démontre pour l'ellipse : ayant mené LL′ par le centre, les angles LOB, AOL′ sont égaux comme opposés au sommet. Soient x', y' les coordonnées du point L, et x'', y'' celles du point L′; la tangente trigonométrique de l'angle LOB étant représentée par $\frac{y'}{x'}$, et celle de l'angle AOL′ l'étant par $\frac{y''}{x''}$, nous avons, en vertu de l'égalité de ces angles,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}, \quad (*) \ldots\ldots (238)$$

et comme les points x', y' et x'', y'' appartiennent à la courbe, nous aurons entre ces coordonnées les équations

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2), \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x''^2); \ldots (239)$$

divisant la première par la seconde, nous trouverons

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - x''^2}; \ldots\ldots (240)$$

or l'équation (238) nous donnera

$$\frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''};$$

(*) On parviendrait aussi à cette équation par la similitude des triangles rectangles OLP, OL′P′, qui donnent $x' : y' :: x'' : y''$.

substituant cette valeur dans l'équation (240), nous obtiendrons

$$\frac{x'^2}{x''^2} = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - x''^2};$$

chassant les dénominateurs et réduisant, il reste

$$x'^2 = x''^2;$$

ces valeurs entraînent l'égalité des deux termes de la fraction du second membre de l'équation (240), d'où il suit qu'on a encore

$$y'^2 = y''^2,$$

et puisque, par la propriété du carré de l'hypoténuse,

$$OL^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{et} \quad OL'^2 = x''^2 + y''^2,$$

et que, d'après ce qui précède, les seconds membres de ces équations sont égaux, il en résulte que

$$OL^2 = OL'^2;$$

et comme nous ne considérons que les valeurs absolues de ces lignes, nous passerons de l'égalité précédente à celle-ci

$$OL = OL'.$$

La même démonstration étant appliquée à l'hyperbole, on reconnaîtra de même que chaque diamètre de cette courbe est partagé au centre en deux parties égales.

349. La parabole n'a point de centre; néanmoins on lui donne pour diamètre toute droite qui, passant par un point M, est parallèle à l'axe des x; cela suit de notre définition du diamètre (art. **347**), car la parabole étant considérée comme une ellipse dont le centre est à l'infini, le diamètre mené par le point M doit être dirigé vers le centre; il faut donc qu'il soit parallèle à l'axe des x, autrement le centre ne serait plus à l'infini, car le diamètre et le grand axe feraient entre eux un angle, et s'atteindraient nécessairement.

Fig. 121. **350.** Si par les extrémités L et L' de l'ellipse (*fig.* 121) et de
Fig. 122. l'hyperbole (*fig.* 122), on mène deux tangentes, ces tangentes

seront parallèles. En effet, puisqu'il a été prouvé (art. **348**) que les abscisses OP et OP′ (*fig.* 121) des extrémités L et L′ étaient égales, il en résulte que les droites OT et OT′, qui dans l'ellipse (art. **286**) comme dans l'hyperbole (art. **310**) ont pour expression $\frac{a^2}{x'}$, ne diffèrent pas entre elles, ayant la même valeur de x'. Par conséquent, les triangles OLT, OL′T′, dans lesquels les angles opposés au sommet comprennent des côtés égaux, sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des angles OLT, OL′T′, et par suite le parallélisme des tangentes LT, L′T′. Fig. 121.

351. Maintenant, je vais démontrer que le diamètre coupe obliquement la tangente; en effet, s'il lui était perpendiculaire, il se confondrait avec la normale; et par conséquent le point R (*fig.* 121 et 122), où la normale rencontre l'axe des abscisses, coïnciderait avec le centre O de la courbe. Or, en faisant $y = 0$ dans l'équation de la normale de l'ellipse (art. **282**) ou de l'hyperbole (art. **312**), afin d'avoir l'abscisse du point R, on trouve : Fig. 121 et 122.

Pour l'ellipse, $$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = \frac{c^2}{a^2} x' ; \ldots (241)$$

Pour l'hyperbole, $$x = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x' = \frac{c^2}{a^2} x' ; \ldots (242)$$

en réduisant les valeurs de ces abscisses à l'aide des équations (160) et (195), on voit que la condition nécessaire pour que le diamètre passe par le centre est que la valeur de x soit nulle. Or, celle qui est donnée par l'équation (241) ne peut être nulle que dans deux cas : 1° lorsque $c = 0$ et que l'excentricité se réduit à un point; il est évident que, dans ce premier cas, l'ellipse se change en cercle; 2° lorsque $x' = 0$; et comme x' est l'abscisse du point de tangence, il faut, dans ce second cas, que la tangente se trouve à l'extrémité du petit axe, et que par conséquent le diamètre se confonde avec le petit axe.

A l'égard de l'équation (242), elle nous apprend que

lorsque c est nul, $a^2 + b^2 = 0$; d'où l'on tire $b^2 = -a^2$. Cette valeur montre l'impossibilité du cas.

CHAPITRE XIX.

Des diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole.

352. Si par le centre on mène un diamètre parallèle à la tangente, ce diamètre est ce qu'on appelle un *diamètre conjugué* à celui qui passe par le point de tangence; ce dernier porte le nom de *diamètre transverse*. Nous avons vu (art. **348**) qu'ils étaient partagés l'un et l'autre en deux parties égales par la courbe. Je vais maintenant en chercher la valeur en fonction des axes.

Pour cet effet, représentons par p l'angle que le diamètre transverse fait avec l'axe des x, et par q l'angle que le second diamètre fait avec le même axe, l'équation de la courbe étant $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$, en prenant (art. **262** et **292**) le signe supérieur pour l'ellipse et le signe inférieur pour l'hyperbole (*); elle sera satisfaite par les coordonnées x', y' du point L (*fig.* 120 et 122), où le diamètre transverse rencontre cette courbe. On aura donc

Fig. 120 et 122.

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2; \quad \ldots\ldots \quad (243)$$

mais le triangle rectangle OLP donne

$$a'^2 = x'^2 + y'^2; \quad \ldots\ldots \quad (244)$$

mettant dans cette équation la valeur de y'^2 tirée de l'équation (243), il vient

$$a'^2 = x'^2 \pm b^2 \mp \frac{b^2x'^2}{a^2};$$

(*) Pour suivre avec plus de facilité les opérations où, contre son emploi ordinaire, le double signe ne sert qu'à distinguer l'ellipse de l'hyperbole, il me paraît convenable de faire deux lectures, en n'ayant égard dans l'une qu'au signe supérieur, et dans l'autre qu'au signe inférieur.

chassant le dénominateur, on a

$$a^2 a'^2 = a^2 x'^2 \pm a^2 b^2 \mp b^2 x'^2 ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (245)$$

mais dans le triangle OLP (*fig.* 120 et 122), formé par le diamètre et les coordonnées du point où il rencontre la courbe, nous avons (art. 85)

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OL} \cos \mathrm{LOP},$$

ou

$$x' = a' \cos p ;$$

substituant cette valeur dans l'équation (245), on obtient

$$a^2 a'^2 = a^2 a'^2 \cos^2 p \pm a^2 b^2 \mp a'^2 b^2 \cos^2 p ;$$

rassemblant dans le premier membre les termes en $a^2 a'^2$, et mettant a'^2 en facteur commun, il vient

$$a^2 a'^2 (1 - \cos^2 p) = \pm a^2 b^2 \mp a'^2 b^2 \cos^2 p ;$$

remplaçant $1 - \cos^2 p$ par $\sin^2 p$, on obtient

$$a^2 a'^2 \sin^2 p \pm a'^2 b^2 \cos^2 p = \pm a^2 b^2 ;$$

d'où l'on tire, en changeant les signes inférieurs,

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 p \pm a^2 \sin^2 p} . \quad . \quad . \quad . \quad (246)$$

Désignons par q l'angle formé par un second diamètre $\mathrm{ON} = b'$; tout ce que nous avons dit du diamètre a' dans son rapport avec l'angle p pourra s'appliquer au diamètre b', considéré relativement à l'angle q; nous n'aurons donc besoin que de changer a' en b' et p en q pour déduire l'équation suivante de l'équation (246),

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 q \pm a^2 \sin^2 q} . \quad . \quad . \quad . \quad (247)$$

353. Jusqu'à présent ces deux équations conviennent à deux diamètres quelconques, et l'on ne voit encore aucune liaison entre ceux que nous désignons sous le nom de *diamètres conjugués;* cependant on sent que lorsqu'on a pris arbitrairement p, le point où le diamètre OL rencontre la courbe

est déterminé, et qu'il en est de même de la tangente, qui, étant parallèle au second diamètre, ne laisse plus la position de ce dernier arbitraire; d'où il suit que l'angle q dépend de l'angle p. Il existe donc une relation entre ces angles, que nous allons chercher. Nous remarquerons d'abord que puisque le diamètre transverse passe par l'origine et fait un angle p avec l'axe des abscisses, son équation est

$$y = x \text{ tang } p;$$

et comme le point de tangence x', y' est sur ce diamètre, l'équation précédente doit être satisfaite par les coordonnées x', y'; par conséquent l'on a

$$y' = x' \text{ tang } p;$$

d'où l'on tire $$\text{tang } p = \frac{y'}{x'}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (248)$$

D'un autre côté, le second diamètre passant aussi par le centre et faisant avec l'axe x le même angle que la tangente au point x', y' (art. 352), ce second diamètre rencontrera l'axe des x sous un angle dont la tangente trigonométrique aura pour expression (art. 279 et 308) $\pm \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$, en prenant le signe supérieur pour l'ellipse et le signe inférieur pour l'hyperbole; en sorte qu'on aura

$$\text{tang } q = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}.$$

Si l'on multiplie cette valeur par l'équation (248), on obtiendra ce résultat remarquable :

$$\text{tang } p \text{ tang } q = \mp \frac{b^2}{a^2}. \quad \ldots\ldots \quad (249)$$

354. Cette équation peut se mettre sous une autre forme, car, en changeant tang p en $\frac{\sin p}{\cos p}$ et tang q en $\frac{\sin q}{\cos q}$, elle se transformera en

$$\frac{\sin p}{\cos p}\,\frac{\sin q}{\cos q} = \mp \frac{b^2}{a^2};$$

et en chassant les dénominateurs, on obtiendra

$$a^2 \sin p \sin q = \mp b^2 \cos p \cos q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

355. Dans le cas de l'ellipse, l'équation (249) nous donnant

$$\operatorname{tang} q = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} p}, \quad \operatorname{tang} p = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} q},$$

montre que si l'angle dont la tangente appartient au second membre est aigu, la tangente de l'autre angle a une valeur négative, et par conséquent appartient à un angle obtus. Au contraire, dans l'hyperbole, la conséquence que l'on peut tirer des équations

$$\operatorname{tang} q = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} p}, \quad \operatorname{tang} p = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} q},$$

est que les deux angles p et q doivent être aigus ensemble ou obtus ensemble.

356. Cette condition nécessite que l'un des diamètres conjugués de l'hyperbole ne rencontre pas la courbe; en effet, soit p le plus petit des angles p et q, on a

$$\operatorname{tang} q > \operatorname{tang} p \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} p < \operatorname{tang} q; \ldots \quad (251)$$

mais l'équation (249) nous donne, pour l'hyperbole,

$$\operatorname{tang} q = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} p}, \quad \operatorname{tang} p = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} q};$$

substituant ces valeurs dans les inégalités (251), il vient

$$\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} p} > \operatorname{tang} p, \quad \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} q} < \operatorname{tang} q;$$

chassant les dénominateurs, et remplaçant les tangentes par les rapports du sinus au cosinus, il vient

$$b^2 \cos^2 p > a^2 \sin^2 p, \quad b^2 \cos^2 q < a^2 \sin^2 q;$$

d'où l'on tire

$$b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p \textit{ positif}, \quad b^2 \cos^2 q - a^2 \sin^2 q \textit{ négatif}; \ldots (252)$$

en comparant ces valeurs aux dénominateurs des équations (246) et (247), on voit que, dans le cas de l'hyperbole où l'on n'a égard qu'au signe inférieur, $b^2 \cos^2 q - a^2 \sin^2 q$ étant négatif, il en est de même de la valeur de b'^2; d'où il suit que b' est imaginaire et ne peut rencontrer la courbe; et pour qu'une quantité négative ne se présente pas sous une forme positive, écrivons ainsi l'équation (247):

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{\pm (a^2 \sin^2 q \pm b^2 \cos^2 q)},$$

et alors dans les deux cas, ce qui est entre les parenthèses sera positif. Par conséquent, si l'on fait abstraction du signe négatif qui précède ces parenthèses, et qui, ne servant qu'à indiquer la position de la ligne, devient inutile lorsqu'on ne veut pas avoir égard à cette position; b'^2, dans l'hypothèse de l'hyperbole, ne sera plus qu'une constante positive qui aura pour valeur absolue

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 q \pm b^2 \cos^2 q} \quad \ldots\ldots\ldots (253)$$

357. Les équations (246), (253) et (249) vont nous conduire à une relation entre les diamètres et les axes indépendante des expressions trigonométriques. Pour cela, soient, pour un point M (*fig.* 124)

$OP = x$, $PM = y$, *les coordonnées rectangulaires;*

$OQ = x'$, $QM = y'$, *les coordonnées obliques;*

Fig. 124. nous avons (*fig.* 124) les relations suivantes entre ces coordonnées

$$OP = OH + QR, \quad MP = QH + MR,$$

ou $$OP = OQ \cos p + MQ \cos q, \quad MP = OQ \sin p + MQ \sin q;$$

remplaçant les lignes OP, OQ, MP et QM par leurs valeurs ana-

lytiques, nous obtiendrons

$$x = x' \cos p + y' \cos q, \quad y = x' \sin p + y' \sin q;$$

mettant ces valeurs dans les équations (162) et (197), que nous réunissons en une seule, de cette manière :

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2;$$

en adoptant le signe supérieur pour l'ellipse, et le signe inférieur pour l'hyperbole, nous trouverons

$$\begin{matrix} b^2\cos^2 p \\ \pm a^2 \sin^2 p \end{matrix} \left| \begin{matrix} x'^2 + 2b^2 \cos p \cos q \\ \pm 2a^2 \sin p \sin q \end{matrix} \right| \begin{matrix} x'y' + b^2 \cos^2 q \\ \pm a^2 \sin^2 q \end{matrix} \Bigg| y'^2 = a^2 b^2; \ldots (254)$$

le coefficient du terme en $x'y'$ étant nul, en vertu de l'équation (250), l'équation (254), après avoir divisé tous ses termes par $a^2 b^2$, se réduit à

$$\frac{b^2 \cos^2 p \pm a^2 \sin^2 p}{a^2 b^2} x'^2 \pm \frac{(a^2 \sin^2 q \pm b^2 \cos q)}{a^2 b^2} y'^2 = 1.$$

Par là, ayant rejeté le signe du coefficient de y'^2 hors des parenthèses, la quantité qu'elles renferment sera essentiellement positive. Éliminons-la au moyen de la valeur absolue de b'^2 donnée par l'équation (253), et opérons de même sur le coefficient de x'^2, en recourant à l'équation (246), nous aurons

$$\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1;$$

multipliant par $a'^2 b'^2$, on obtient

$$b'^2 x'^2 \pm a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2 \ldots\ldots (255)$$

358. Cette équation peut fournir une seconde preuve de ce que nous avons dit (art. **356**), que si l'un des diamètres qui entrent dans l'équation (255) est réel, l'autre est imaginaire. En effet, a' étant supposé être le demi-diamètre qui rencontre la courbe, l'autre demi-diamètre ne sera autre chose que l'ordonnée qu'on mènera par le centre. Or, en faisant $x' = 0$ pour avoir l'ordonnée qui passe par le centre, l'équation (255),

en prenant le signe inférieur qui se rapporte à l'hyperbole, nous donnera cette valeur imaginaire

$$y' = \pm b' \sqrt{-1};$$

mais quoique b' ne rencontre pas la courbe, et par conséquent n'exprime aucune ligne, b', ainsi que le demi-petit axe, ne figure pas moins comme constante dans l'équation.

359. Ce n'est pas la seule analogie qui existe entre les diamètres et les axes; en effet, en résolvant l'équation (255) par rapport à y', en ne considérant d'abord que le signe supérieur, et ensuite que l'inférieur, on trouve, pour les deux courbes :

$$y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x'^2}, \qquad y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x'^2 - a^2},$$

et l'on voit que toute ordonnée a deux valeurs égales et de signes contraires, qui tombent l'une au-dessus et l'autre au-dessous du diamètre transverse; d'où il suit que le diamètre transverse coupe toutes les cordes parallèles à la tangente en deux parties égales.

360. On peut demander pourquoi on mène le diamètre conjugué parallèlement à la tangente? Je répondrai que s'il en était autrement, les cordes qui dérivent du prolongement des ordonnées ne seraient pas partagées chacune en deux parties égales.

Fig 125. Pour le démontrer, soient DT (*fig.* 125) une tangente qui passe par l'extrémité D du demi-diamètre OD, et MN une corde quelconque, oblique par hypothèse à cette tangente; menons par les points M et N les droites MR, NS parallèles à la tangente en D, elles seront partagées chacune en deux parties égales (art. 348); et les triangles EMG, ENI étant semblables à cause des angles opposés au sommet en E, et des angles alternes-internes EMG, ENI, on aura cette proportion :

$$EM : EN :: MG : NI,$$

ou, parce que MG et NI sont les moitiés des cordes MR, SN,

$$EM : EN :: MR : SN;$$

mais, d'après les équations de l'art. 359, on voit qu'en changeant les abscisses, les ordonnées changent aussi, et que par conséquent les cordes MR, SN n'étant pas dans le rapport de un à un, sont inégales; il en est donc de même des parties EM, EN traversées par le diamètre;

tandis que lorsque les ordonnées sont parallèles à la tangente au point de contact, le diamètre coupe la courbe symétriquement ; ce qui tend à simplifier son équation, comme nous le verrons dans le chap. XXVIII.

Un seul cas semblerait faire exception à ma démonstration, c'est celui où (*fig.* 126) les cordes MR et SN sont égales ; mais il faut remarquer que cette circonstance n'a lieu que quand EG = EI ; d'où il faut conclure que le point E est alors au centre de la courbe, et que par conséquent la corde MN est un diamètre ; ce qui s'accorde avec l'art. 348. Fig. 126.

361. C'est la liaison qui existe entre les diamètres et leurs conjuguées, qui a porté plusieurs auteurs à les définir ainsi : *Un diamètre est la ligne qui passe par le milieu de toutes les cordes parallèles à la tangente menée au point où ce diamètre rencontre la courbe.*

362. L'équation (255), résolue par rapport à x', donne

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Pour l'ellipse,} & x' = \pm\dfrac{a'}{b'}\sqrt{b'^2 - y'^2} \\ \text{Pour l'hyperbole,} & x' = \pm\dfrac{a'}{b'}\sqrt{y'^2 - b'^2}\end{array}\right\} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256)$$

ce qui montre que le demi-diamètre b', comme le premier, est parallèle à la tangente qui lui est menée au point N (*fig.* 120), où il rencontre la courbe ; car, par la forme des équations (256), ce sont les x' que l'on prend pour ordonnées ; la double valeur du radical indique donc que ces ordonnées sont les moitiés des cordes que partage le second diamètre $2b'$: ces cordes se réduisent en N (*fig.* 120) à un point qui se confond avec la tangente NT qui leur est parallèle, ainsi qu'au diamètre transverse $LL' = 2a'$, qui devient par conséquent conjugué de l'autre. Fig. 120.

Il suit de là que les deux diamètres sont réciproquement conjugués ; ce qui n'empêche pas que l'un de ces diamètres ne soit imaginaire, comme nous l'avons prouvé (art. 356).

363. L'hyperbole étant rapportée à ses diamètres conjugués (*fig.* 128), examinons si elle a des asymptotes comme lorsqu'elle était rapportée (*fig.* 115) aux axes principaux. Fig. 128. Fig. 115.

Pour résoudre ce problème, supposons que la courbe soit rap-
Fig. 128. portée aux diamètres OD et OE (*fig.* 128), et que l'on compte les x' sur OD; si une asymptote existe, comme ces sortes de lignes partent du centre, son équation sera dépourvue de la constante b de l'équation (232) (page 207), et aura la forme

$$y = Ax; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (257)$$

la valeur de la constante A nous étant inconnue, nous disposerons de cette constante pour que notre ligne droite ait l'inclinaison qui la rende asymptote à la courbe. Or, si la ligne qui appartient à l'équation (257) est une asymptote, il faut qu'elle atteigne l'hyperbole à une distance infinie de l'origine O, en un point qui sera commun à la courbe. Soient donc x', y' les coordonnées de ce point de contact, ces coordonnées devant satisfaire à l'équation (257) de la ligne droite et à l'équation de l'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués, représentée par

$$b^2 x'^2 - a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2,$$

nous aurons à la fois

$$y' = Ax', \quad b'^2 x'^2 - a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2;$$

éliminant y' entre ces équations, nous trouverons, pour x',

$$x' = \pm \sqrt{\frac{a'^2 b'^2}{b'^2 - A^2 a'^2}}.$$

Or, pour que x' soit infini, il faut qu'on ait

$$b'^2 - A^2 a'^2 = 0;$$

ce qui détermine ainsi A :

$$A = \pm \frac{b'}{a'};$$

substituant cette valeur dans l'équation (257), nous aurons

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x;$$

la première valeur de y appartiendra à l'asymptote OL (*fig.* 128), et la seconde à l'asymptote OL′ également éloignées de la direction du diamètre OD.

364. Les asymptotes comparées aux diamètres nous conduisent encore à reconnaître cette propriété remarquable de l'hyperbole : soit SS′ une sécante; si par le milieu G de la corde MM′ on mène la droite OG (*fig.* 128), le diamètre, Fig 128. devant passer par le centre et par le milieu de toutes les cordes, sera déterminé par les deux points O et G; d'où il suit que OG sera le diamètre qui a GM pour ordonnée; donc la tangente TT′ au point D est parallèle à cette ordonnée. Cela posé, cette tangente étant partagée en deux parties égales par les asymptotes (art. **346**), les triangles semblables ODT, OGS, justifieront cette proportion :

$$DT : GS :: OD : OG;$$

les triangles semblables ODT′, OGS′, formés par les mêmes parallèles, donneront aussi

$$DT' : GS' :: OD : OG;$$

et, à cause de l'identité des seconds rapports, on tire de ces proportions

$$DT : GS :: DT' : GS',$$

et, en changeant les moyens,

$$DT : DT' :: GS : GS';$$

or, DT étant égal à DT′ (art. **346**), il en résulte qu'on a

$$GS = GS';$$

et, si de ces lignes égales on retranche les ordonnées GM et GM′, qui sont aussi égales, il restera

$$MS = M'S.$$

365. Deux droites OL, OL′ (*fig.* 129) qui forment entre Fig. 129 elles un angle arbitraire, étant prises pour asymptotes d'une hyperbole qui passe par un point M, si l'on veut en

trouver d'autres, on mènera par ce point des droites rs, $r's'$, $r''s''$, etc.; et en prenant $sm = \mathrm{M}r$, $s'm' = \mathrm{M}r'$, $s''m'' = \mathrm{M}r''$, etc., on déterminera les points m, m', m'', etc., qui pourront servir chacun à en obtenir d'autres.

Cette construction est la conséquence de la démonstration de l'art. 364.

366. Il existe deux théorèmes importants sur les diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole.

Le premier de ces théorèmes est que, *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle formé par le grand et le petit axe.*

Pour le démontrer, prenons d'abord l'ellipse dont les carrés des demi-diamètres sont exprimés par les équations (246) et (247), prises avec le signe supérieur. Si, après avoir fait évanouir les dénominateurs, nous écrivons ainsi ces équations

$$a'^2 (b^2 \cos^2 p + a^2 \sin^2 p) = a^2 b^2, \quad . \quad . \quad . \quad (258)$$

$$b'^2 (b^2 \cos^2 q + a^2 \sin^2 q) = a^2 b^2; \quad . \quad . \quad . \quad (259)$$

et que nous adoptions le signe supérieur de l'équation (250), signe qui appartient au cas de l'ellipse, nous réduirons cette équation à celle-ci :

$$\frac{\sin p}{\cos p} \frac{\sin q}{\cos q} = - \frac{b^2}{a^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

d'où nous tirerons cette valeur de b^2,

$$b^2 = - a^2 \frac{\sin p}{\cos p} \frac{\sin q}{\cos q},$$

que nous introduirons dans le premier membre de l'équation (258); ce qui nous donnera, après avoir effacé du dénominateur $\cos p$ détruit par un des facteurs de $\cos^2 p$,

$$a'^2 \left(- a^2 \sin p \frac{\sin q}{\cos q} \cos p + a^2 \sin^2 p \right) = a^2 b^2;$$

effaçant le facteur commun a^2, réduisant ensuite au même dé-

nominateur et mettant $\frac{\sin p}{\cos q}$ en facteur commun, il viendra

$$-a'^2 \frac{\sin p}{\cos q} (\sin q \cos p - \sin p \cos q) = b^2,$$

et observant que ce qui est entre les parenthèses est le développement de $\sin(q-p)$, il restera

$$-a'^2 \frac{\sin p}{\cos q} \sin(q-p) = b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Si de l'équation (260) on tire ensuite cette valeur de a^2,

$$a^2 = -b^2 \frac{\cos p}{\sin p} \frac{\cos q}{\sin q},$$

et qu'on la substitue à a^2, dans le premier membre seulement de l'équation (259), on trouvera d'abord

$$b'^2 \frac{\cos q}{\sin p} (\cos q \sin p - \sin q \cos p) = a^2,$$

équation qui se réduit à

$$b'^2 \frac{\cos q}{\sin p} \sin(p-q) = a^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

En comparant cette équation à l'équation (261), nous remarquerons que dans la première nous avons $\sin(q-p)$, et dans la seconde $\sin(p-q)$; or, si l'une de ces expressions est positive, il faut nécessairement que l'autre soit négative. Admettons, par exemple, que q surpasse p; dans ce cas, $q-p$ étant positif, $p-q$ sera négatif; et l'expression $\sin p \cos q - \sin q \cos p$, qui est le développement de $\sin(p-q)$, s'écrira ainsi :

$$-(\sin q \cos p - \sin p \cos q);$$

ce qui montre qu'on peut remplacer $\sin(p-q)$ par $-\sin(q-p)$. Faisant donc cette substitution dans l'équation (262), elle deviendra

$$-b'^2 \frac{\cos q}{\sin p} \sin(q-p) = a^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263)$$

Multipliant cette équation par l'équation (261), on obtiendra

$$a'^2 b'^2 \sin(q-p)^2 = a^2 b^2,$$

et en passant à la racine (*Note treizième*),

$$a' b' \sin(q-p) = ab \ldots\ldots\ldots \quad (264)$$

367. Si, au contraire, p surpassait q, on remplacerait $\sin(q-p)$ par $-\sin(p-q)$ dans l'équation (261) qui, devenue positive, et multipliée par l'équation (262), nous amènerait ce résultat

$$a'^2 b'^2 \sin^2(p-q) = a^2 b^2,$$

et en passant à la racine, on aurait

$$a' b' \sin(p-q) = ab,$$

équation qui nous dit la même chose que l'équation (264); car, dans l'un et dans l'autre cas, $q-p$ et $p-q$ représentent l'angle formé par les deux diamètres conjugués.

Supposons donc q plus grand que p; le premier membre
Fig. 130. de l'équation (264) exprime la surface ODHN (*fig.* 130) du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués, car l'angle $q-p$ que forment ces deux demi-diamètres étant représenté par NOD, si nous abaissons la perpendiculaire DI de l'extrémité de l'un des diamètres sur la direction de l'autre, nous aurons (art. 85)

$$\text{DI} = \text{OD} \sin \text{DOI},$$

ou

$$\text{DI} = b' \sin(q-p);$$

multipliant la base $\text{ON} = a'$ par cette hauteur, on a

$$\textit{surface}\ \text{DONH} = \text{ON} \times \text{DI},$$

où

$$\textit{surface}\ \text{DONH} = a' b' \sin(q-p);$$

et comme ab exprime évidemment le rectangle construit sur les deux demi-axes a et b, le parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres est donc égal au rectangle formé par les deux demi-axes a et b. Et en observant que, si le parallélogramme et le rectangle ont des côtés doubles, les deux sur-

faces quadrupleront en même temps, on pourra conclure la proposition que nous avons énoncée.

La démonstration serait tout à fait la même pour l'hyperbole.

368. Le second théorème que nous allons démontrer sur les diamètres conjugués est que, *dans l'ellipse, la somme des carrés des diamètres conjugués est égale à la somme des carrés du grand et du petit axe, tandis que, dans l'hyperbole, la différence des carrés des diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des axes.*

Prenons les signes supérieurs des équations (246) et (253), parce que ces signes se rapportent à l'ellipse, et divisons les deux termes de ces équations par $\cos^2 a$; nous n'en changerons pas la valeur, et nous obtiendrons, en remplaçant le rapport du sinus au cosinus par la tangente, en vertu de l'équation (9) (page 8),

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 \frac{1}{\cos^2 p}}{a^2 \tang^2 p + b^2}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2 \frac{1}{\cos^2 q}}{a^2 \tang^2 q + b^2}; \quad \ldots \quad (265)$$

mais nous avons, d'après la première des équations (10),

$$\frac{1}{\cos} = \textit{sécante},$$

et la première des équations (6) (page 7), en prenant le rayon pour unité, nous donne immédiatement

$$(\textit{sécante})^2 = 1 + \tang^2;$$

il en résulte que

$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tang^2.$$

Au moyen de cette valeur, les équations (265) deviennent

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \tang^2 p)}{a^2 \tang^2 p + b^2}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \tang^2 q)}{a^2 \tang^2 q + b^2}; \quad \ldots \quad (266)$$

or, pour que la valeur de b'^2 soit une fonction de p comme celle de a'^2, nous éliminerons $\tang^2 q$ au moyen de l'équation (249); d'où nous tirerons

$$\tang^2 q = \frac{b^4}{a^4 \tang^2 p};$$

substituant cette valeur dans la seconde des équations (266), nous obtiendrons

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2 \left(1 + \frac{b^4}{a^4 \tang^2 p}\right)}{\frac{b^4}{a^2 \tang^2 p} + b^2};$$

supprimant le facteur commun b^2, il restera

$$b'^2 = \frac{a^2 \left(1 + \frac{b^4}{a^4 \tang^2 p}\right)}{\frac{b^2}{a^2 \tang^2 p} + 1};$$

multipliant les deux termes de la fraction par $a^4 \tang^2 p$, on trouvera

$$b'^2 = \frac{(a^4 \tang^2 p + b^4)}{b^2 + a^2 \tang^2 p};$$

en résumé, nous aurons donc

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \tang^2 p)}{a^2 \tang^2 p + b^2}, \quad b'^2 = \frac{(a^4 \tang^2 p + b^4)}{b^2 + a^2 \tang^2 p}. \quad . \quad . \quad (267)$$

Ajoutons ces équations; on trouve, en réunissant d'abord les termes affectés de $\tang^2 p$, et ensuite ceux qui ne renferment pas cette expression trigonométrique, observant en outre que le dénominateur est le même,

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 (a^2 + b^2) \tang^2 p + (a^2 + b^2) b^2}{a^2 \tang^2 p + b^2},$$

expression qui se réduit à

$$a'^2 + b'^2 = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 \tang^2 p + b^2)}{a^2 \tang^2 p + b^2},$$

et par conséquent à

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \text{ (\textit{Note quatorzième}). . . . (268)}$$

A l'égard de l'hyperbole, en prenant la différence des valeurs de a'^2 et de b'^2 données par les équations (146) et (153) (*), nous trouverons, en opérant de même,

$$a'^2 - b'^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - a^2) \tang^2 p}{(b^2 - a^2) \tang^2 p},$$

expression qui se réduit également à

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \quad \text{(\textit{Note quinzième}); . . . . (269)}$$

369. En terminant la théorie des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole, nous allons examiner dans quel cas ces diamètres sont égaux. Pour commencer par l'ellipse, l'équation (268), en faisant $b' = a'$, donnera

$$a' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \text{ . . . . . (270)}$$

en coupant l'ellipse avec des demi-diamètres égaux à

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

on déterminera la position des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

(*) Nous employons ici l'équation (153) au lieu de la 147e, parce que les propriétés géométriques que nous démontrons ne peuvent concerner l'ordonnée imaginaire de l'équation (147), mais bien la constante b' dont l'équation (253) donne la valeur absolue.

370. Pour trouver leurs directions, soient α, β les coordonnées du point où l'un de ces diamètres coupe la courbe; il y aura donc entre α et β la relation

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2 b^2,$$

α et β étant les côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est l'un de ces diamètres égaux, nous aurons

$$\alpha^2 + \beta^2 + = a'^2;$$

éliminant a' au moyen de l'équation (270), on obtiendra

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Multipliant cette équation par b^2, et retranchant le résultat de la précédente, nous trouverons, après avoir réduit,

$$\beta^2 = \frac{b^2}{2},$$

par conséquent

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Or, la tangente trigonométrique de l'angle p, formée par α et β, étant exprimée par $\frac{\beta}{\alpha}$, nous aurons

$$\text{tang}^2 p = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{et} \quad \text{tang}\, p = \pm\frac{b}{a}.$$

Ces deux valeurs de tang p appartiennent aux angles COB, C'OB (*fig.* 131) formés par les diamètres conjugués égaux.

Fig. 131.

En comparant les valeurs que nous venons d'obtenir pour tang p, à celles que nous avons trouvées art. 332, on voit que les diamètres égaux de l'ellipse se confondent avec les asymptotes que l'on mènerait à une hyperbole dans laquelle le grand axe et le petit axe seraient les mêmes que ceux de l'ellipse.

371. Quant à l'hyperbole, l'équation

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

montre que lorsque $b' = a'$, on a $a = b$; ce qui montre que les axes ne peuvent être égaux que dans le cas de l'hyperbole équilatère. Ce n'est donc que dans cette sorte d'hyperbole qu'il peut y avoir des diamètres égaux.

CHAPITRE XX.

Des diamètres de la parabole.

372. La définition que nous avons donnée (art. **347**) du diamètre nous a conduit à reconnaître (art. **349**) que les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe des x. C'est encore ce qui résulte de cette autre définition, qu'un diamètre est la ligne qui partage toutes les ordonnées parallèles à la tangente en deux parties égales : il est d'abord évident que si le diamètre formait en A un angle SAX (*fig.* 132) avec l'axe des x, la partie LAS qui diffère de LAX de la partie SAH serait moindre que LAX, et par conséquent que HAX, qui équivaut à LAX; d'où résulte l'inégalité des ordonnées menées sur AS. Il en serait de même des ordonnées rectangulaires qui appartiendraient au diamètre A′X′ (*fig.* 133) parallèle à AX, tandis que nous allons voir que, comme dans l'ellipse et l'hyperbole, les ordonnées parallèles à la tangente au point A′, où le diamètre coupe la courbe, sont toutes partagées en deux parties égales par ce diamètre. Fig. 132. Fig. 133.

Pour cela, soient (*fig.* 134) AP et PM les coordonnées x et y d'un point M de la courbe, et A′Q et QM les coordonnées x' et y' du même point rapportées au diamètre A′X′; nommons de plus a et b les coordonnées AB et A′B du point fixe A′ où le diamètre rencontre la parabole, et θ la tangente trigonométrique de l'angle TA′X′ formé par la tangente en A′; Fig. 134.

l'angle MQX′ étant, par hypothèse, égal à θ, nous avons évidemment

$$AP = AB + BE + EP,$$

ou

$$AP = AB + A'Q + QR; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (271)$$

A′Q et QM sont l'abscisse et l'ordonnée du point M rapporté à l'axe A′X′; et, en observant que AP est l'abscisse x qui répond à l'ordonnée PM $= y$, et que les côtés du triangle rectangle MQR ont pour expressions (art. 88)

$$QR = QM \cos\theta, \quad MR = QM \sin\theta,$$

l'équation (271) deviendra

$$AP \text{ ou } x = a + x' + y' \cos\theta;$$

d'une autre part, l'ordonnée MP se composant des deux parties MR et RP, dont la seconde équivaut à A′B, nous avons

$$MP = A'B + MR,$$

ou

$$y = b + y' \sin\theta;$$

ces valeurs de x et de y devant satisfaire à l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole, il vient

$$(b + y' \sin\theta)^2 = 2pa + 2px' + 2py' \cos\theta. \quad . \quad . \quad . \quad (272)$$

Pour déterminer $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on tire de la première des équations (10) (page 9),

$$\cos\theta = \frac{1}{\textit{sécante}\ \theta};$$

mais, d'après la première des équations (6) (page 7), on a, en remplaçant r par l'unité,

$$\textit{sécante}^2\,\theta = 1 + \tang^2\theta.$$

Au moyen de ces deux équations, on obtient

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2\theta}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (273)$$

et, d'après l'équation (9) (page 8), d'où l'on tire

$$\sin\theta = \operatorname{tang}\theta \cos\theta,$$

on a, en remplaçant le cosinus par sa valeur,

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (274)$$

Or, nous avons vu (art. 328) (page 196) que la tangente trigonométrique dont les coordonnées sont x' et y' avait pour expression $\frac{p}{y'}$; par conséquent pour le point A', dont les coordonnées sont $AD = a$ et $A'D = b$, cette tangente se change en $\frac{p}{b}$; de sorte que nous avons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{b};$$

mettant cette valeur de tang θ dans les équations (273) et (274), nous aurons

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{b^2}}}, \quad \sin\theta = \frac{p}{b\sqrt{1+\frac{p^2}{b^2}}};$$

réduisant au même dénominateur, et faisant passer le diviseur b^2 hors du signe radical, nous trouverons

$$\cos\theta = \frac{1}{\frac{1}{b}\sqrt{b^2+p^2}}, \quad \sin\theta = \frac{p}{\sqrt{b^2+p^2}},$$

ou plutôt

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+p^2}}, \quad \sin\theta = \frac{p}{\sqrt{b^2+p^2}};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (272), nous obtiendrons, en développant,

$$b^2 + \frac{2pby'}{\sqrt{b^2+p^2}} + \frac{p^2y'^2}{b^2+p^2} = 2pa + 2px' + \frac{2pby'}{\sqrt{b^2+p^2}}.$$

Observant qu'en vertu de l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole à laquelle les coordonnées a et b satisfont, on a $b^2 = 2pa$, nous trouverons donc, après avoir réduit,

$$\frac{p^2 y'^2}{b^2 + p^2} = 2px';$$

cette équation, divisée par p, nous donnera

$$y'^2 = \frac{2(b^2 + p^2)}{p} x'.$$

373. Nous pouvons encore la simplifier, en mettant $2pa$ à la place de b^2, ce qui la convertira en

$$y'^2 = 2(2a + p)x';$$

désignons la constante $2a + p$ par p', il viendra enfin

$$y'^2 = 2p'x', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (275)$$

équation de même forme que celle de la parabole; et en observant que $2p'$ revient à $4(a + \frac{1}{2}p)$, et qu'en prenant
Fig. 135. (*fig.* 135) AD $= \frac{1}{2}p$, la distance DB = A'I, d'après la nature de la parabole, est égale à A'F, on a donc

$$\text{A'F} = 4(a + \tfrac{1}{2}p) = 2p';$$

d'où il suit que $2p'$ exprime la distance du foyer F au point A', tout comme lorsque pour le demi-paramètre FH on avait FH = LH. Voilà ce qui a fait donner à $2p'$ le nom de *paramètre du diamètre*.

L'équation (275) étant résolue, nous donne

$$y' = \pm \sqrt{2p'x'};$$

ce qui nous montre que y' a deux valeurs égales et de signes contraires, et que par conséquent toutes les ordonnées sont partagées en deux parties égales par les diamètres; mais, comme nous l'avons vu, ces ordonnées, au lieu d'être rec-

tangulaires, doivent être obliques et parallèles à la tangente au point A′.

CHAPITRE XXI.

Des cordes supplémentaires.

374. Nous avons vu (art. **222**) que la formule générale de la droite assujettie à passer par les points α, β et α', β' était

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (276)$$

déterminons avec cette formule les équations des cordes ML, ML′ (*fig.* 136) qui expriment la distance d'un point M aux extrémités d'un diamètre LL′; pour cela, soient x' et y' les coordonnées de l'extrémité L du diamètre, et x'', y'' celles du point M; le diamètre LL′ étant partagé en deux parties égales au centre O, nous aurons (art. **348**) OL′ = OL; par conséquent les triangles rectangles OLP, OL′P′, qui ont des angles opposés au sommet en O, seront égaux; d'où il suit que les coordonnées OP′ et P′L′ seront égales aux coordonnées OP et PL; et si l'on fait attention que OP′ et P′L′ tombent en sens opposés des positives, les coordonnées du point L′ seront $-x$ et $-y$. Il est facile maintenant d'obtenir les équations des cordes ML, ML′, car en faisant Fig. 136.

Pour la corde ML, coord. de M, x'', y''; coord. de L, x', y';

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \alpha' = x'', \quad \beta' = y'', \ldots$$

la formule (276) se change en

équation ML, $$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (277)$$

Pour la corde ML′, coord. de M, x'', y''; coord. de L′, $-x'$, $-y'$;

$$\alpha = -x', \quad \beta = -y', \quad \alpha' = x'', \quad \beta' = y'',$$

la formule (276) devient

équation ML′, $$y + y' = \frac{y' + y''}{x' + x''}(x + x'); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (278)$$

et comme les coordonnées OP et PL, OP′ et PL′ que nous employons sont rectangulaires, on voit que les expressions $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ et $\frac{y'' + y'}{x'' + x'}$ sont

les tangentes trigonométriques des angles LOP, L'OP', que les cordes OL, OL' forment avec l'axe des x. Appelons θ et θ' ces angles, nous aurons donc

$$\text{tang}\,\theta = \frac{y''-y'}{x''-x'}, \quad \text{tang}\,\theta' = \frac{y''+y'}{x''+x'};$$

multipliant ces équations par ordre, on obtiendra

$$\text{tang}\,\theta\ \text{tang}\,\theta' = \frac{y''^2-y'^2}{x''^2-x'^2}; \ldots\ldots\ldots\ldots (279)$$

mais les points L et M étant sur la courbe, satisfont à l'équation

$$y^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

qui appartient à l'ellipse en prenant le signe supérieur, et à l'hyperbole si l'on n'a égard qu'au signe inférieur.

Nous aurons donc

$$y''^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2), \quad y'^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2);$$

prenant la différence de ces équations, on obtiendra

$$\frac{y''^2-y'^2}{x''^2-x'^2} = \mp\frac{b^2}{a^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (279), on trouvera enfin

$$\text{tang}\,\theta\ \text{tang}\,\theta' = \mp\frac{b^2}{a^2}. \ldots\ldots\ldots\ldots (280)$$

375. Cette équation, indépendante des coordonnées, appartient donc à tout diamètre, quelque manière qu'il soit placé, et a lieu également pour un axe; car les axes ne sont, au fond, que des diamètres à coordonnées rectangulaires, et alors les cordes supplémentaires partent des extrémités de l'axe, sur lequel elles sont appuyées.

Lorsque $b = a$, ce qui arrive lorsque l'ellipse se change en cercle, l'équation (280) se réduit à

$$\text{tang}\,\theta\ \text{tang}\,\theta' = -1;$$

ce qui remplit la condition nécessaire pour que les cordes soient perpendiculaires entre elles.

Si, au moyen de l'équation (280), l'on élimine le second membre de l'équation (249), on trouve:

$$\text{tang}\,p\ \text{tang}\,q = \text{tang}\,\theta\ \text{tang}\,\theta';$$

dans le cas où $\text{tang}\,p = \text{tang}\,\theta$, cette équation se réduit à

$$\text{tang}\,q = \text{tang}\,\theta'. \ldots\ldots\ldots\ldots (281)$$

376. Ceci nous offre ce moyen facile de mener dans l'ellipse un dia-

mètre conjugué à un diamètre donné LL′ (*fig.* 137). Par le point A menons une corde AD parallèle à LL′, et alors l'angle A $= \theta$, comme correspondant, sera égal à l'angle LOB $= p$; et la corde supplémentaire DB, déterminée de position, formera avec le grand axe AB un angle égal à θ' ; par conséquent, si l'on mène une parallèle NN′ à DB, les angles NOB et DBC étant égaux comme correspondants, on aura NOB $= q$, et par conséquent $\theta' = q$, en vertu de l'équation (281). Fig. 137.

377. Réciproquement, quand on donne une tangente ou un diamètre conjugué, et qu'une corde parallèle est menée à cette tangente ou à ce diamètre conjugué, la corde supplémentaire sera parallèle au diamètre qui passera par le point de contact.

378. Les cordes supplémentaires peuvent servir encore à mener une tangente à l'ellipse. Si l'on veut par exemple qu'une tangente passe par un point donné M, on mènera (*fig.* 138) par ce point et par le centre O la droite OM, on tirera du sommet A la parallèle AG à OM ; cette parallèle fera, avec l'axe des abscisses, un angle A équivalent à l'angle p. Fig. 138.

379. Si donc, par la propriété des cordes supplémentaires, l'angle A est représenté par θ, l'angle GBX le sera par $\theta' = q$, et par conséquent équivaudra à l'angle formé par la tangente avec l'axe des abscisses ; donc il ne s'agira plus que de mener par le point M une parallèle MT à BG.

380. La même relation tang p tang q = tang θ tang θ' existera dans l'hyperbole : si l'on veut déterminer la position de la tangente au point M (*fig.* 139), on mènera par ce point de tangence et par le centre, une droite OM, et par le sommet A on tirera la parallèle AG à OM, et tirant ensuite la droite GB, la parallèle M′T à cette droite sera la tangente. Fig. 139.

381. Pour compléter la théorie des cordes supplémentaires, nous ferons quelques observations qui, si elles ne sont pas d'une grande utilité, montreront du moins l'accord de l'analyse avec la forme des courbes, dont nous avons parlé dans ce chapitre. Le signe négatif qui a lieu dans l'équation (280) quand elle se rapporte à l'ellipse, nous apprend que les tangentes sont alors de signes contraires, et que par conséquent l'un des angles est aigu et l'autre obtus ; représentons ce dernier par MBX (*fig.* 140), l'angle intérieur MBA sera donc aigu, aussi bien que l'angle A qui l'est, en vertu de l'équation (180), parce que MBX est obtus ; il suit de là que la perpendiculaire MP tombera dans le triangle AMB ; et comme l'ordonnée MP de l'ellipse est moindre que l'ordonnée correspondante NP du cercle, il en résulte que l'angle AMB sera compris dans l'angle ANB, qui par conséquent ne pourra être qu'obtus, puisque ANB est droit, par la propriété du cercle. Fig. 140.

382. A l'égard de l'hyperbole, l'équation $\tang\theta \tang\theta'$, qui s'y rapporte, prouve que les deux tangentes étant de mêmes signes, appartiennent à deux angles tous deux aigus ou tous deux obtus. Dans le
Fig. 141. premier cas, soient A et MBX (*fig.* 141) ces angles aigus; en considérant les angles intérieurs du triangle AMB, nous avons

$$A + B + M = 2 \textit{ angles droits};$$

d'où nous tirons

$$M = 2 \textit{ angles droits} - (A + B):$$

donc M sera obtus, si la somme des angles A et B vaut moins qu'un angle droit, et sera aigu dans le cas contraire.

383. A l'égard du cas où les deux angles sont obtus, toute la différence qu'il y aura, c'est que les côtés AM, BM, au lieu de se rencontrer en M, se rencontreront en M'.

CHAPITRE XXII.

De la transformation des coordonnées en général.

384. Nous avons vu, en traitant des diamètres conjugués, qu'on était quelquefois dans la nécessité de rapporter la courbe à de nouvelles coordonnées, et que ces coordonnées n'étaient pas toujours rectangulaires. Nous allons maintenant examiner les diverses formules qui ont lieu lorsqu'on veut opérer ce changement. Soient donc x et y les coordonnées d'un point M
Fig. 142. (*fig.* 142), déterminé par le concours des coordonnées AP et PM, relatives à des axes rectangulaires AX, AY; la position de ce point M serait également déterminée, si, ayant pris deux nouveaux axes AX', AY', formant avec l'axe primitif AX des angles arbitraires X'AX, Y'AX, on connaissait les coordonnées $AQ = x'$ et $QM = y'$ de ce point.

x' et y' sont donc des fonctions des angles X'AX, Y'AX, et des coordonnées x, y; réciproquement, x et y sont des fonctions de x', y' et de ces angles.

385. Cherchons la relation qui existe entre ces quantités. Pour cet effet, menons les parallèles QN, QL, aux axes primitifs AX, AY; et soient l'angle X'AX $= p$, et l'angle Y'AX, ou MQN $= q$: on a évidemment

$$x = \text{AP} = \text{AL} + \text{QN},$$

$$y = \text{PM} = \text{QL} + \text{MN},$$ Fig. 142.

et, d'après l'art. 85,

$$\text{AL} = x' \cos p,\ \text{QL} = x' \sin p,\ \text{QN} = y' \cos q,\ \text{MN} = y' \sin q.$$

Substituant ces valeurs, on trouve

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos p + y' \cos q, \\ y &= x' \sin p + y' \sin q, \end{aligned}\right\} \ldots\ (282),$$ *formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y à un système de coordonnées obliques x', y', l'origine étant la même.*

386. Je dis que l'origine est la même; car en faisant $x' = 0$ et $y' = 0$, on trouve x et y nuls.

387. Si les nouvelles coordonnées sont aussi rectangulaires, l'angle MQX' $= q - p$ sera droit; on aura donc

$$q - p = 90^\circ,$$

et, par conséquent,

$$\sin q = \sin(90 + p) = \sin 90 \cos p + \sin p \cos 90;$$

$$\cos q = \cos(90 + p) = \cos 90 \cos p - \sin 90 \sin p;$$

et comme $\sin 90 = 1$, et $\cos 90 = 0$, les valeurs de $\sin q$ et de $\cos q$ se réduisent à

$$\sin q = \cos p, \quad \cos q = -\sin p. \ldots (283)$$

Les quatre valeurs des lignes A′L, QL, QN, MN, se trouvent immédiatement par le théorème de la trigonométrie (art. 100) qui nous apprend que les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels aux côtés qui leur sont opposés, et en observant que l'angle QLA′ a le même sinus que QLX″ $= r$; nous avons donc

$$\sin A'LQ : \sin A'QL :: A'Q : A'L, \quad \text{ou} \quad \sin r : \sin m :: x' : A'L;$$
$$\sin A'LQ : \sin QA'L :: A'Q : QL, \quad \text{ou} \quad \sin r : \sin p :: x' : QL;$$
$$\sin MNQ : \sin QMN :: QM : QN, \quad \text{ou} \quad \sin r : \sin n :: y' : QN;$$
$$\sin MNQ : \sin MQN :: QM : MN, \quad \text{ou} \quad \sin r : \sin q :: y' : MN;$$

on tire de ces proportions

$$A'L = x'\frac{\sin m}{\sin r}, \quad QL = x'\frac{\sin p}{\sin r}, \quad QN = y'\frac{\sin n}{\sin r}, \quad MN = y'\frac{\sin q}{\sin r}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de x et de y, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\frac{\sin m}{\sin r} + y'\frac{\sin n}{\sin r}, \\ y &= b + x'\frac{\sin p}{\sin r} + y'\frac{\sin q}{\sin r}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (287)$$

et parce que dans le triangle A′QL la somme des angles p et m vaut l'angle extérieur QLX″ $= r$, et que dans le triangle
Fig. 144. MQN (*fig.* 144) on a $q + n =$ MNI $= r$, on pourra substituer à m et à n les valeurs $r - p$ et $r - q$, et les formules précédentes deviendront

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\frac{\sin(r-p)}{\sin r} + y'\frac{\sin(r-q)}{\sin r}, \\ y &= b + x'\frac{\sin p}{\sin r} + y'\frac{\sin q}{\sin r}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (288)$$

formules pour passer d'un système de coordonnées obliques à

un autre système de coordonnées obliques, l'origine étant différente.

392. Si les anciennes coordonnées étaient obliques, et qu'on voulût passer à des coordonnées rectangulaires, on regarderait les axes A'X', A'Y' des x' et des y' (*fig.* 144) comme les axes des anciennes coordonnées. Alors les axes AX et AY seraient ceux des nouvelles, et il ne s'agirait que de déterminer, au moyen des équations (285), les valeurs de x' et de y' en fonction de x et de y. Pour cet effet, on éliminerait y' entre ces équations, en multipliant la première par $\sin q$ et la seconde par $\cos q$; retranchant le second résultat du premier et divisant par le multiplicateur de x', on obtiendrait la valeur de cette variable; multipliant ensuite la seconde des équations (285) par $\cos p$, et la première par $\sin p$; et retranchant le second résultat du premier, on obtiendrait de même la valeur de y'. Fig. 144.

Voici ces deux valeurs :

$$x' = \frac{(x-a)\sin q - (y-b)\cos q}{\sin(q-p)},$$

$$y' = \frac{(y-b)\cos p - (x-a)\sin p}{\sin(q-p)}; \quad \ldots (289)$$

formules pour passer d'un système de coordonnées obliques x', y', à un système de coordonnées rectangulaires x, y, l'origine étant différente.

Enfin, si l'on voulait que l'origine fût la même, on ferait dans ces formules $a = 0$ et $b = 0$, et l'on aurait

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x\sin q - y\cos q}{\sin(q-p)}, \\ y' &= \frac{y\cos p - x\sin p}{\sin(q-p)}, \end{aligned}\right\} \ldots (290),$$ *formules pour passer d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires x, y, l'origine étant la même.*

CHAPITRE XXIII.

De la transformation des coordonnées des courbes du second ordre.

393. Dans le chapitre relatif aux diamètres, nous avons eu pour but d'employer des procédés directs, pour nous éclairer sur la nature de ces sortes de lignes. Le présent chapitre doit être moins considéré comme un second moyen de parvenir aux mêmes résultats, que comme une application utile des formules de transformation. Cette application, rendue plus facile par la théorie que nous avons établie sur les diamètres, fera connaître toute la fécondité de l'analyse, qui, en disposant de certaines quantités indéterminées, ne laisse échapper aucun des cas qui se rattachent à une question.

L'équation de l'ellipse que nous avons obtenue en supposant les coordonnées rectangulaires, peut, au moyen des formules (282), se transformer en une autre, dont les coordonnées forment entre elles un angle arbitraire. Pour cet effet, nous substituerons dans l'équation

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots \quad (291)$$

de l'ellipse rapportée au centre (art. **262**), les valeurs de x et de y données par les formules (281), et nous trouverons

$$\begin{array}{l} b^2\cos^2 p \\ +a^2\sin^2 p \end{array}\left|\begin{array}{l} x'^2 + 2b^2\cos p\cos q \\ \quad\quad + 2a^2\sin p\sin q \end{array}\right|\begin{array}{l} x'y' + b^2\cos^2 q \\ \quad\quad + a^2\sin^2 q \end{array}\Bigg| y'^2 = a^2b^2 \ldots (292)$$

Nous considérerons l'angle p comme arbitraire pour que le diamètre puisse être mené dans tous les sens; mais dès que ce diamètre aura été placé, l'angle q sera nécessairement déterminé, puisqu'il est le même que celui qui est formé par la tangente en L (*fig.* 121). Cependant, pour un moment, n'adoptons aucune hypothèse sur les angles p et q pour nous donner la

Fig. 121.

faculté de choisir celle qui nous conviendra le mieux. Dans ce cas, il nous sera permis de déterminer q par une condition.

Si l'on dispose donc de cette condition en faisant évanouir l'un des trois termes qui composent le premier membre de l'équation (292), j'observe d'abord qu'on ne peut déterminer q en égalant à zéro le coefficient de y'^2, car on aurait alors

$$b^2 \cos^2 q + a^2 \sin^2 q = 0; \quad \ldots\ldots \quad (293)$$

en mettant dans cette équation pour $\cos^2 q$ sa valeur $1 - \sin^2 q$, on trouverait

$$\sin^2 q = \frac{-b^2}{a^2 - b^2},$$

et comme a^2 est plus grand que b^2, cette valeur de $\sin^2 q$ se trouverait nécessairement négative; donc celle de $\sin q$ serait imaginaire. D'où il suit qu'il est impossible de déterminer q en égalant les coefficients de y'^2 à zéro.

Le coefficient de x'^2 égalé à zéro ne pourrait déterminer q qu'il ne renferme pas, ni même p, parce que l'équation qui résulterait de cette dernière hypothèse, étant de même forme que l'équation (293), nous conduirait encore à une valeur imaginaire.

394. Il ne nous reste donc plus que la faculté de faire évanouir le terme en $x'y'$: en égalant à zéro le coefficient de ce terme, nous aurons

$$b^2 \cos p \cos q + a^2 \sin p \sin q = 0.$$

Cette équation, divisée par $\cos p \cos q$, nous conduit à

$$\tang p \tang q = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (294)$$

et l'on y reconnaît celle qui, désignée par le n° **249**, appartient à l'ellipse quand on prend le signe supérieur. L'équa-

tion (292) devient, dans cette même hypothèse,

$$(b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p)x'^2 + (b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q)\,y'^2 = a^2 b^2. \quad (295)$$

Divisant tous les termes par $a^2 b^2$, on obtient

$$\frac{b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}{a^2 b^2}x'^2 + \frac{b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q}{a^2 b^2}y'^2 = 1;$$

et, sans rien changer à la valeur des fractions du premier membre, on peut écrire ainsi cette équation :

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}\right)} + \frac{y'^2}{\left(\dfrac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q}\right)} = 1.$$

Le second membre étant de dimension nulle, il faut qu'il en soit de même du premier; ce qui ne peut être, à moins que les quantités

$$\frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p}, \quad \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q}, \ldots (296)$$

qui sont positives comme composées de carrés, ne soient de deux dimensions; nous pouvons donc représenter la première des expressions (296) par a'^2 et la seconde par b'^2 : l'équation (295) revient à celle-ci :

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'}{b'^2} = 1;$$

et en chassant les dénominateurs, on tombe sur cette équation

$$b'^2 x'^2 + a'^2 y = a'^2 b'^2,$$

qui est précisément l'équation (254), qui, prise avec le signe supérieur, existe entre les diamètres conjugués de l'ellipse.

395. Si dans l'équation de l'hyperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, on substitue de même les valeurs de x et de y données par les formules (282) (page 237), en prenant le signe inférieur,

on trouvera

$$\begin{matrix} b^2\cos^2 p \\ -a^2\sin^2 p \end{matrix}\Bigg| x'^2 + \begin{matrix} 2b^2\cos p\cos q \\ -2a^2\sin p\sin q \end{matrix}\Bigg| x'y' + \begin{matrix} b^2\cos^2 q \\ -a^2\sin^2 q \end{matrix}\Bigg| y'^2 = a^2b^2. \quad (297)$$

Avant d'établir aucune hypothèse entre les angles p et q, nous pouvons regarder ces angles comme arbitraires et chercher à en disposer pour faire évanouir deux des termes de l'équation (297); dans ce cas, le choix de ces termes ne présente que ces deux combinaisons :

1°. Le terme en $x'y'$ et l'un des termes en x'^2 et en y'^2;
2°. Les deux termes en x'^2 et en y'^2.

396. Égalant à zéro le coefficient du terme affecté de $x'y'$, il est facile de s'apercevoir qu'on ne peut rendre nul l'un des autres coefficients sans réduire l'équation (297) à l'une de ces formes $Ax'^2 = a^2b^2$ ou $By'^2 = a^2b^2$, équations qui ne pourraient plus servir à construire la courbe, puisque ces équations ne donneraient chacune que deux valeurs pour l'inconnue.

397. Nous bornant donc à égaler le coefficient de $x'y'$ à zéro, nous aurons l'équation de condition

$$b^2\cos p\cos q - a^2\sin p\sin q = 0,$$

qui étant divisée par $\cos p\cos q$, nous conduira à celle-ci :

$$b^2 - a^2\operatorname{tang} p\operatorname{tang} q = 0.$$

Cette équation déterminera toujours l'un des angles p et q, lorsqu'on aura attribué une valeur arbitraire à l'autre. Par conséquent, en disposant de p, on pourra donner (*fig.* 123) à l'axe OX' l'inclinaison nécessaire pour qu'il rencontre la courbe; mais alors, ainsi qu'on l'a vu (art. 358), le second axe ne pourra l'atteindre; or, si l'on supposait q moindre que p ou même égal à p, comme le second diamètre passerait alors par un des points de l'arc BL (*fig.* 123), il Fig. 123.

Fig. 123.

atteindrait la courbe; d'où il suit que pour que OL n'atteigne pas la courbe, il faut que q soit plus grand que p. Cette hypothèse nécessite que, d'après ce qui a été démontré art. 356, $b^2 \cos^2 p$ surpasse $a^2 \sin^2 p$; et que, au contraire, $a^2 \sin^2 q$ surpasse $b^2 \cos^2 q$, et qu'on ait ainsi :

$b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p$, *positif*; $a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q$ *positif*.

Maintenant, si nous écrivons ainsi l'équation (297), délivrée du terme en $x'\,y'$:

$$(b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p)\,x'^2 - (a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q)\,y'^2 = a^2 b^2, \quad (298)$$

on voit, d'après ce qui précède, que les expressions renfermées entre parenthèses seront des quantités positives.

398. Cette équation étant divisée par $a^2 b^2$, devient

$$\frac{(b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p)\,x'^2}{a^2 b^2} - \frac{(a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q)\,y'^2}{a^2 b^2} = 1,$$

ou

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p}\right)} - \frac{y'^2}{\left(\dfrac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q}\right)} = 1; \quad (299)$$

le second membre étant de dimension nulle, il faut qu'il en soit de même du premier; donc les quantités positives

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p} \text{ et } \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q}$$

seront chacune de deux dimensions. Supposant donc

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p} = a'^2,$$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q} = b'^2,$$

l'équation (299) deviendra

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$b'^2 x'^2 - a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2.$$

Tirant la valeur de y'^2, on peut écrire de la sorte cette équation

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x'^2 - a'^2).$$

C'est ainsi que, sans recourir aux équations (246) et (253), dont nous avons donné à priori la valeur, la transformation des coordonnées nous conduit, moins directement, il est vrai, aux équations entre les diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole.

Enfin, la démonstration de l'art. 272 pouvant s'appliquer aux diamètres conjugués de l'hyperbole, nous conclurons que *les carrés des ordonnées menées à l'un des diamètres conjugués parallèlement à l'autre sont entre eux comme les produits des distances du pied de chaque ordonnée aux points où le diamètre rencontre la courbe.*

399. Si dans l'équation de la parabole $y^2 = 4kx$ (art. 317), on substituait les valeurs de x et de y, tirées des formules (282), nous obtiendrions

$$\sin^2 p x'^2 + 2 \sin p \sin q x'y' + \sin^2 q y'^2 - 4k \cos p x' - 4k \cos q y' = 0. \quad (300)$$

Il ne serait possible de faire évanouir des termes dans cette équation, qu'en supposant l'un des angles p et q nul ou droit, parce qu'alors le sinus ou le cosinus devenant zéro, fait évanouir le terme où il entre.

p et q ne peuvent être supposés nuls en même temps; car, dans cette hypothèse, l'ordonnée ne ferait plus d'angle avec l'axe des abscisses, et ne déterminerait des points que dans une même direction, ce qui empêcherait de pouvoir construire la courbe; ainsi on ne peut disposer des angles p et q qu'en supposant l'un de ces angles nul ou droit : par exemple, en faisant

$p = 0$, on trouve

$$\sin^2 q y'^2 - 4kx' - 4k \cos q y' = 0,$$

et
$$y'^2 - \frac{4k \cos q}{\sin^2 q} y' - \frac{4kx'}{\sin^2 q} = 0.$$

Cette équation du second degré étant résolue, donne deux valeurs inégales pour y', et montre que, dans cette hypothèse, l'axe des abscisses n'est pas un diamètre.

Si l'on fait ensuite $p =$ *un angle droit*, on trouve

$$x'^2 + 2 \sin q x' y' + \sin^2 q y'^2 - 4k \cos q y' = 0,$$

équation d'où l'on tire la même conclusion, puisque résolue par rapport à y', elle donne également deux valeurs inégales pour l'ordonnée y'.

On peut d'ailleurs remarquer que ces équations sont plus compliquées que l'équation $y^2 = 4kx$.

400. Examinons si, en changeant la place de l'origine, nous ne parviendrions pas à une équation plus simple entre les coordonnées obliques. Pour cet effet, supposons que l'origine A (*fig.* 144), à laquelle on rapporte l'abscisse $x =$ AP et l'ordonnée $y =$ PM, soit transportée en un point A′ d'où l'on doive compter les nouvelles coordonnées $x' =$ A′Q, et $y' =$ QM, nous avons, dans ce cas, les formules suivantes, de l'art. 389 (*):

Fig 144.

$$x = a + x' \cos p + y' \cos q, \quad y = b + x' \sin p + y' \sin q, \ldots \quad (301)$$

pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, l'origine étant différente. Si l'on substitue donc dans l'équation $y^2 = 4kx$ les valeurs de x et de y données par ces formules, nous trouverons

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \sin^2 p x'^2 + 2 \sin p \sin q & x' y' + \sin^2 q y'^2 + 2b \sin p & x' + 2b \sin q \\ & - 4k \cos p & - 4k \cos q \end{array}\right| \begin{array}{l} y' + b^2 \\ - 4ak \end{array} \Bigg\} = 0 \ldots \quad (302)$$

(*) Ces formules sont générales; car si la nouvelle origine était placée d'une manière différente à l'égard du point A, l'une des constantes a et b ou toutes les deux se détermineraient négativement.

Il se présente ici deux coefficients, susceptibles d'admettre pour p et pour q d'autres valeurs que l'angle droit ou que zéro; ce sont ceux de x' et de y', au premier degré.

Nous égalerons donc à zéro un seul de ces coefficients, celui de y' par exemple, en écrivant l'équation de condition

$$2b \sin q - 4k \cos q = 0; \quad \ldots\ldots \quad (303)$$

l'angle p restant arbitraire, nous l'égalerons à zéro; dans cette hypothèse, qui donne $\sin p = 0$ et $\cos p = 1$, tous les termes qui renferment $\sin p$ et $\sin^2 p$ s'évanouissent, et l'équation (302) se réduit à

$$\sin^2 q y'^2 - 4kx' + b^2 - 4ak = 0.$$

Et comme les constantes a et b qui déterminent la place de l'origine sont arbitraires, nous pourrons supposer que l'origine A′ soit sur un point (*fig.* 145) de la parabole. Les coordonnées $a =$ AB et $b =$ A′B de l'origine devront donc satisfaire à l'équation $y^2 = 4kx$; par conséquent il y aura entre elles la relation $b^2 - 4ak = 0$, et l'équation (302) se réduira alors à Fig. 145.

$$\sin^2 q y'^2 - 4kx' = 0,$$

et donnera $$y'^2 = \frac{4k}{\sin^2 q} x', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (304),$$

équation qui est de la forme de celle de la parabole.

401. Si l'on eût égalé à zéro le coefficient de x', et opéré d'une manière analogue à la précédente, on aurait trouvé une équation de même forme, dans laquelle x' serait l'ordonnée et y' l'abscisse.

402. Déterminons maintenant la valeur de la constante $\frac{4k}{\sin^2 q}$: l'équation (303), ou plutôt $b \sin q = 2k \cos q$, étant

élevée au carré, donne

$$b^2 \sin^2 q = 4k^2 \cos^2 q;$$

mettant à la place de $\cos^2 q$ sa valeur $1 - \sin^2 q$, on a

$$b^2 \sin^2 q = 4k^2 - 4k^2 \sin^2 q,$$

d'où l'on tire $$\sin^2 q = \frac{4k^2}{b^2 + 4k^2};$$

et parce que $$b^2 = 4ak,$$

$$\sin^2 q = \frac{4k^2}{4ak + 4k^2}.$$

Et, en divisant les deux termes de la fraction par $4k$,

$$\sin^2 q = \frac{k}{(a+k)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (304), on trouve

$$y'^2 = \frac{4k}{\left(\frac{k}{a+k}\right)} x',$$

ou plutôt $$y'^2 = 4(a+k)x'.$$

403. L'angle p étant nul par notre détermination, le nouvel axe des x est parallèle à l'ancien; et, comme, en vertu de la relation $b^2 = 4ak$, l'origine est sur la courbe, cela montre que le nouvel axe n'est autre chose qu'un diamètre de la parabole (art. **349**).

Le point où le diamètre rencontre la courbe est ce qu'on appelle le *sommet du diamètre*.

Fig. 145. **404.** La distance AF (*fig.* 145) du sommet au foyer étant k, et équivalant à AD, qui est celle du sommet à la directrice, comme l'abscisse du point B est représentée par a, il en

résulte que DB $= a + k$; mais, par la propriété de la parabole, cette distance du point B à la directrice est égale au rayon vecteur FA′; l'expression $4(a+k)$ revient donc à 4 FA′, c'est-à-dire que la constante $4(a+k)$, qui sert de coefficient à x dans l'équation au diamètre, vaut quatre fois le rayon vecteur qui passe par le sommet du diamètre. Cette constante, comme on l'a vu art. **403**, porte le nom de *paramètre du diamètre*.

405. Il est évident que $4(a+k)$ se réduit à $4k$ lorsque $a = 0$, c'est-à-dire lorsque le diamètre est l'axe principal de la parabole, ce qui est conforme à ce que nous avons dit en parlant de cet axe.

406. L'équation $\sin^2 q = \frac{k}{(a+k)}$ donne $\sin q = \sqrt{\frac{k}{a+k}}$ pour la valeur du sinus de l'angle que forment les nouvelles ordonnées sur le diamètre. Ces ordonnées seront obliques, puisqu'il faudrait que a fût nul pour que la valeur de $\sin q$ se réduisît à l'unité; dans ce cas, le diamètre A′X′ se confondra avec l'axe AX.

On prouvera également par l'équation précédente, que plus a augmente, plus l'angle q diminue.

407. La valeur de y' étant déterminée par celle de x', au moyen de l'équation $y'^2 = 4kx'$, d'où l'on tire $y' = \pm\sqrt{4kx'}$, il en résulte que, pour toute abscisse x' l'ordonnée y' a deux valeurs égales et de signes contraires, qui s'évanouissent en même temps lorsque $x' = 0$, ce qui prouve que l'ordonnée est une parallèle menée à la tangente qui passe par le sommet du paramètre.

Enfin, l'équation au paramètre prouve que *les carrés des ordonnées sont comme les abscisses de ces ordonnées*.

—

CHAPITRE XXIV.

Des équations polaires.

408. Jusqu'à présent nous avons déterminé la position de chaque point d'une courbe au moyen de deux coordonnées variables x et y, et d'un angle constant qu'elles forment.

Supposons maintenant que l'une de ces coordonnées soit constante et que l'angle varie, nous aurons un nouveau procédé pour construire la courbe. En effet, si l'abscisse est constante et que nous la prenions égale à la distance du sommet au foyer,
Fig. 146. lorsque nous ferons varier (*fig.* 146) l'angle $\varphi = \mathrm{FMB}$, l'ordonnée FM deviendra successivement FM′, FM″, FM‴, etc., et déterminera les points M′, M″, M‴, etc., de la courbe. On a donné à cette ordonnée variable le nom de *rayon vecteur*.

Si une équation établit une relation entre le rayon vecteur et φ, et qu'on fasse varier successivement cet angle φ, on pourra déterminer les valeurs correspondantes du rayon vecteur.

409. Pour trouver cette équation lorsque la courbe est une ellipse, cherchons d'abord la relation qui existe entre le rayon
Fig. 147. vecteur FM (*fig.* 147), et les coordonnées $\mathrm{OP} = x$ et $\mathrm{PM} = y$.

Soient $\mathrm{FM} = z$ et $\mathrm{OF} = c$, on a évidemment

$$\mathrm{FM}^2 = \mathrm{PM}^2 + (\mathrm{OP} + \mathrm{OF})^2,$$

ou

$$z^2 = y^2 + (x + c)^2.$$

Mettant dans cette équation la valeur de y^2 tirée de l'équation de l'ellipse rapportée au centre, on a

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (x + c)^2;$$

ou en développant

$$z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + x^2 + 2cx + c^2,$$

et ordonnant par rapport à x,

$$z^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + 2cx + c^2 + b^2,$$

ou
$$z^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x^2 + 2cx + c^2 + b^2.$$

Éliminant b^2 au moyen de l'équation (160) $c^2 = a^2 - b^2$ (art. 261), on trouve

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2;$$

et par conséquent

$$z = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right). \ (*)$$

Or, par hypothèse, la ligne FM qui représente z est supposée être positive. Donc nous ne prendrons que le signe supérieur, et nous aurons seulement

$$z = a + \frac{cx}{a}. \ (**)$$

(*) Si l'on veut savoir ce que signifie la valeur de z prise avec le signe inférieur, elle indique qu'il faudrait porter la seconde valeur de z dans le sens contraire, c'est-à-dire de F en M'.

Car la seconde valeur de z étant $z = -a - \frac{cx}{a}$, on voit que quel que soit le signe de x, le rayon vecteur z doit être négatif, parce que a^2 surpassant cx, il faut que $\frac{cx}{a}$ soit moindre que a; or, l'abscisse du point M' est d'un signe contraire à celui qu'elle avait pour le point M : il faut donc changer le signe de x dans cette seconde valeur, et l'on aura

$$\text{FM}' = -a + \frac{cx}{a}.$$

(**) Cette valeur de z est la même que nous avons trouvée pour z', équation (158) (page 156); aussi peut-on éviter les calculs de l'art. 409, en se fondant sur l'équation démontrée art. 260.

410. Il est facile maintenant d'exprimer la valeur de z en fonction de l'angle $\varphi = \text{MFP}$ (*fig.* 147).

Fig. 147.

Pour cet effet, soit x' l'abscisse FP comptée du foyer, on a, d'après l'inspection de la figure, $x = x' - c$.

Substituant, il vient

$$z = a + \frac{x' - c}{a} c = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{cx'}{a}.$$

Faisant $x' = z \cos \varphi$, l'équation précédente devient

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{cz \cos \varphi}{a};$$

d'où l'on tire

$$az - cz \cos \varphi = a^2 - c^2,$$

et enfin

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi},$$

ou plutôt (art. **261**), équation 160,

$$z = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi},$$

équation polaire de l'ellipse rapportée au foyer F, *l'angle* $\varphi = \text{MFB}$ *étant supposé aigu.*

411. Si dans le second membre de cette équation on divise les deux termes par a, et qu'on observe que $\frac{b^2}{a}$ exprime une troisième proportionnelle aux deux demi-axes et équivaut à la moitié du paramètre, et que $\frac{c}{a}$ exprime le rapport de l'excentricité $2c$ au grand axe $2a$, on pourra remplacer $\frac{b^2}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par e, et notre équation prendra la forme

$$z = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (305)$$

Si l'angle φ devenait obtus, il faudrait changer le signe du terme $c \cos \varphi$.

412. Pour trouver l'équation polaire de l'hyperbole, en nommant toujours z le rayon vecteur FM (*fig.* 148), nous avons Fig. 148.

$$z^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Substituons dans cette équation la valeur de y tirée de l'équation de l'hyperbole rapportée au centre, nous aurons

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + (c + x)^2$$
$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + 2cx - b^2 + c^2.$$

Éliminant b^2 au moyen de l'équation $c^2 = a^2 + b^2$ (art. **292**), nous trouverons

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a} x + a\right)^2,$$

d'où nous tirerons

$$z = \frac{c}{a} x + a.$$

413. Quoique cette équation se présente sous la même forme que celle que nous avons trouvée pour l'ellipse, elle en diffère par les valeurs qu'on donne à c dans ces deux équations.

Nommons x' l'abscisse FP comptée du foyer, nous aurons

$$x = x' - c.$$

Substituant cette valeur, nous obtiendrons

$$z = \frac{cx'}{a} - \frac{(c^2 - a^2)}{a},$$

et faisant $x' = z \cos \varphi$, il viendra

$$z = \frac{cz \cos \varphi}{a} - \frac{c^2 - a^2}{a};$$

d'où il sera facile de tirer

$$z = \frac{c^2 - a^2}{c \cos\varphi - a},$$

ou plutôt (art. 292),

$$z = \frac{b^2}{c \cos\varphi - a},$$

équation polaire de l'hyperbole rapportée au foyer F, *l'angle* $\varphi = \mathrm{MFB'}$ *étant supposé aigu.*

414. Comme on l'a fait pour l'ellipse, si l'on divise les deux termes du second membre de cette équation par a et qu'on remplace $\frac{b^2}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par e, on obtiendra

$$z = \frac{p}{e \cos\varphi - 1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (306)$$

équation dans laquelle p sera le demi-paramètre qui est une troisième proportionnelle aux demi-axes a et b, et dont le coefficient e exprimera le rapport de l'excentricité au demi-grand axe.

415. Enfin, si l'on nomme z le rayon vecteur FM de la parabole (*fig.* 149), en observant que la distance du foyer F au sommet A est le quart du paramètre $2p$, on a $\mathrm{AF} = \frac{1}{2}p$. Cela posé, le triangle rectangle FMP nous donne

Fig. 149.

$$\mathrm{FM}^2 = \mathrm{FP}^2 + \mathrm{MP}^2,$$

ou

$$\mathrm{FM}^2 = (\mathrm{AP} - \mathrm{AF})^2 + \mathrm{MP}^2; \quad \ldots \quad (307)$$

et comme nous venons de voir qu'on avait

$$\mathrm{AF} = \tfrac{1}{2}p,$$

et que nous avons en outre

$$\mathrm{FM} = z, \quad \mathrm{AP} = x, \quad \mathrm{PM}^2 = y^2 = 2px,$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (307), on trouvera

$$z^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

ou, parce que le second membre est un carré parfait,

$$z^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

d'où l'on tirera

$$z = x + \frac{p}{2}.$$

Nommons x' l'abscisse FP comptée du foyer, on aura

$$x = x' + \frac{p}{2},$$

et la valeur de z deviendra

$$z' = x' + p;$$

et mettant $z \cos\varphi$ à la place de x', et tirant la valeur de x, on obtiendra

$$z = \frac{p}{1 - \cos\varphi}, \quad \ldots \quad (308),$$ *équation polaire de la parabole rapportée au foyer* F, *l'angle* $\varphi =$ MFX *étant supposé aigu.*

416. En comparant entre elles les équations (305), (306) et (308), observons que l'angle φ étant supposé aigu dans le sens des x et des y positifs, z doit être positif, ce qui exige que e soit moindre que l'unité dans l'équation (305) et surpasse l'unité dans l'équation (306) (*); et si, de plus, on remarque que e est remplacé par l'unité dans l'équation (308), on en conclura que l'équation polaire appartiendra à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole, selon que l'on aura

$$e < 1, \quad e > 1 \quad \text{et} \quad e = 1.$$

(*) On peut d'ailleurs remarquer que dans la fraction $\frac{c}{a}$, qui est la valeur de e, le numérateur c est moindre que a dans l'ellipse, et surpasse a dans l'hyperbole; d'où il suit que, dans le premier cas, e est moindre que l'unité, et l'emporte sur l'unité dans le second.

CHAPITRE XXV.

Des courbes semblables.

417. Deux courbes sont semblables lorsqu'elles peuvent être placées l'une sur l'autre, de manière à avoir le même axe des abscisses; et que deux rayons partis du même point sont coupés proportionnellement par l'une de ces courbes.

Dans les courbes du second ordre à centre, le demi-grand axe et le demi-petit axe pouvant être considérés comme des rayons menés du centre à la courbe, nous pouvons dire encore que deux courbes du second ordre à centre sont semblables lorsque les demi-axes sont coupés proportionnellement par l'une de ces courbes, et que l'on a, par conséquent,

$$a : b :: a' : b' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Ces définitions sont des propositions qu'il nous reste à démontrer, en admettant que la proportion (309) se vérifie pour deux courbes.

Fig. 150. **418.** Considérons d'abord l'ellipse, et soient (*fig.* 150) $OD = d$, $OD' = d'$ des rayons homologues de deux ellipses, x, y les coordonnées du point D, et x', y' les coordonnées du point D'; ces points appartenant aux courbes, on aura, d'après la propriété de l'ellipse,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2;$$

d'où l'on tire

$$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2), \quad a'^2y'^2 = b'^2(a'^2 - x'^2):$$

Fig. 150. divisant ces équations l'une par l'autre, on obtient (*fig.* 150)

$$\frac{a^2}{a'^2}\frac{y^2}{y'^2} = \frac{b^2}{b'^2}\frac{(a^2 - x^2)}{a'^2 - x'^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

mais la proportion (309) nous donne

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (311)$$

substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (310), et supprimant le facteur commun, il reste

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a'^2 - x'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (312)$$

Considérons ensuite les triangles ODP, OD'P', qui sont semblables, à cause de l'angle commun O et des angles droits en P et en P'; ces triangles nous donnent les proportions

$$y : y' :: x : x', \qquad x : x' :: d : d';$$

d'où nous tirons

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{x'}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{d}{d'} \ldots\ldots\ldots (313)$$

Au moyen de la première de ces équations, on peut changer l'équation (312) en celle-ci :

$$\frac{x^2}{x'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a'^2 - x'^2};$$

multipliant les deux membres par le produit des dénominateurs et réduisant, on obtient

$$a^2 x'^2 = a'^2 x^2,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{a}{a'} = \frac{x}{x'};$$

mettant dans cette équation la valeur de $\frac{x}{x'}$ donnée par la seconde des équations (313), on obtient

$$\frac{a}{a'} = \frac{d}{d'};$$

donc $$a : a' :: d : d';$$

ce qui prouve que les demi-diamètres sont entre eux comme les demi-grands axes.

Pour deux autres demi-diamètres $OE = e$, $OE' = e'$
Fig. 150. (*fig.* 150), on prouvera de même qu'on a

$$a : a' :: e : e'.$$

419. Les deux premiers termes étant les mêmes dans ces proportions, il s'ensuit qu'on a

$$d : d' :: e : e';$$

d'où il faut conclure que deux demi-diamètres de la plus grande courbe sont coupés proportionnellement par la plus petite.

420. Il est facile maintenant de démontrer que dans des ellipses semblables, les contours sont comme les axes.

Fig. 151. En effet, les triangles ODE, OD'E' (*fig.* 151), d'après la démonstration précédente, ayant leurs côtés proportionnels, sont semblables; donc DE et D'E' sont dans le rapport des axes; il en est de même de tous les triangles OEF, OE'F', OFG, OF'G', etc.; par conséquent

$$DE : D'E' :: EF : E'F' :: FG : F'G';$$

et puisque dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, on aura

$$DE + EF + FG + \text{etc.} : D'E' + E'F' + F'G' + \text{etc.} :: DE : D'E',$$

ou parce que le rapport des demi-axes peut être substitué à celui de DE à DE', on pourra écrire

$$DE + EF + FG + \text{etc.} : D'E' + E'F' + F'G' + \text{etc.} :: a : a';$$

d'où il suit que les contours des polygones inscrits à deux

ellipses semblables sont comme les demi-axes, ou pour mieux dire comme les axes.

421. Si l'on passe aux limites, on pourra substituer les ellipses aux polygones qui leur sont inscrits, et conclure que les contours des ellipses sont entre eux comme les axes.

Les triangles semblables ODE, OD′E′; OEF, OE′F′; OFG, OF′G′; etc., étant entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues, il s'ensuit que les polygones qui résultent de la somme de ces triangles sont dans le même rapport, et qu'on a

polygone DEFG, etc. : *polygone* D′E′F′G′ :: $OD^2 : OD'^2$;

les ellipses étant les limites des polygones que nous venons de considérer, concluons que deux ellipses semblables sont entre elles comme les carrés de leurs demi-diamètres homologues ou comme les carrés de leurs demi-axes, ou, en quadruplant le dernier rapport, sont entre elles comme les carrés de leurs axes.

422. Toute la théorie que nous avons énoncée sur les ellipses semblables peut s'appliquer à l'hyperbole.

Mais ce qui est particulier à cette dernière courbe, c'est que si deux hyperboles ont le même centre et le même axe des abscisses, elles auront les mêmes asymptotes. En effet, soient a, b et a', b' les demi-axes de ces courbes, on aura, d'après leur similitude,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (314)$$

or, $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$ représentant les tangentes trigonométriques des angles que les asymptotes font avec l'axe des x, ces angles seront égaux, et les asymptotes des deux courbes se confondront.

423. Les équations de nos deux hyperboles semblables rapportées à leurs asymptotes étant

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}, \qquad x'y' = \frac{a'^2 + b'^2}{4},$$

divisons le second membre de la première par a^2, et multiplions en dehors par la même quantité ; opérant de même pour la seconde équation, nous trouverons

$$xy = \frac{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{4}, \quad x'y' = \frac{a'^2\left(1+\frac{b'^2}{a'^2}\right)}{4};$$

divisons ces équations l'une par l'autre, nous trouverons

$$\frac{xy}{x'y'} = \frac{\frac{a^2}{a'^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{1+\frac{b'^2}{a'^2}}.$$

Or, en vertu de l'équation (314), cette dernière se réduit à

$$\frac{xy}{x'y'} = \frac{a^2}{a'^2};$$

mais si l'on prend la même abscisse pour les deux courbes, en faisant $x = x'$, cette équation nous donnera

$$y : y' :: a^2 : a'^2;$$

d'où il suit que les ordonnées à une même abscisse seront entre elles comme les carrés des demi-grands axes ; ce qui nous fournira un moyen commode de tracer l'une de ces hyperboles lorsque l'autre sera donnée.

424. Enfin, lorsque $b = a$ et que $b' = a'$, ce qui a lieu dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a

$$\frac{b}{a} = 1, \quad \frac{b'}{a'} = 1;$$

l'égalité des seconds membres de ces équations entraînant celle des premiers, on a nécessairement

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'};$$

ce qui montre que la condition de similitude est remplie pour toutes les hyperboles équilatères, et prouve que ces sortes d'hyperboles sont toujours semblables.

425. Jusqu'à présent nous avons fait partir les rayons vecteurs du centre commun de deux courbes placées l'une sur l'autre, et dont l'axe des abscisses a la même direction, et nous avons démontré (art. **419**) que pour que ces courbes fussent semblables, il suffisait que deux rayons vecteurs quelconques de la plus grande fussent coupés proportionnellement par la plus petite. Nous allons maintenant prouver que, pour tout autre centre C′ pris au hasard dans l'intérieur de la surface commune de ces courbes, les deux rayons C′M, C′N (*fig.* 152) seront coupés proportionnellement par le contour de la plus petite courbe. Fig. 152

Pour cet effet, nous unirons les centres C et C′ par une droite CC′, et du point C′ nous mènerons les deux rayons vecteurs C′M, C′N. Cela posé, les rayons vecteurs CM, CN, qui partent du centre C, étant partagés proportionnellement par le contour de la petite ellipse, nous avons par hypothèse (art. **419**),

$$CM : Cm :: CN : Cn. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (315)$$

Il s'agit de prouver qu'il en est de même de C′M et de C′N, qui partent de C′. Pour cela, du point *m* menons *mr* parallèle à MC′, les triangles C*mr*, CMC′ donnent

$$CM : Cm :: CC' : Cr;$$

on tire de cette proportion et de la précédente (315),

$$CN : Cn :: CC' : Cr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (316)$$

Cette proportion prouve que la droite *nr* est parallèle à NC′, et montre que CN et CC′ sont coupés proportionnellement.

Nous aurons donc encore, en vertu des triangles semblables C*nr*, CNC′,

$$C'N : rn :: CN : Cn; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

et les triangles semblables Cmr, CMC' nous donneront celle-ci :

$$C'M : rm :: CM : Cm.$$

Si dans cette dernière proportion nous remplaçons le rapport de CM à Cm par celui de CN à Cn, tiré de la proportion (315), nous obtiendrons

$$C'M : rm :: CN : Cn. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

Les seconds rapports des proportions (317) et (318) étant les mêmes, nous aurons

$$C'N : rn :: C'M : rm. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

Or, si nous observons que les angles nrm, $NC'M$, formés par des côtés parallèles, sont égaux, nous pourrons, en menant ces côtés parallèlement à eux-mêmes, faire glisser le secteur de la petite courbe sur CC', de manière à amener l'angle r sur l'angle C'. Dans ce cas, rm tombera de C' en m', et rn prendra la position $C'n'$. Les points m et n ainsi transportés en m' et en n', appartiendront donc encore à la petite courbe; et, au lieu de la proportion (319), nous aurons celle-ci :

$$C'N : C'n' :: C'M : C'm';$$

ce qui prouve que les rayons vecteurs $C'N$, $C'M$, partis du centre C', comme ceux dont C est le centre, sont coupés proportionnellement par la petite courbe. C' est ce qu'on appelle un *centre de similitude*.

426. Cette démonstration s'appliquant aussi bien à l'hyperbole qu'à l'ellipse, il en résulte que, lorsqu'on a deux ellipses ou deux hyperboles semblables, et qu'elles ont le même axe des abscisses, les rayons vecteurs, partis d'un même foyer, jouissent, comme le centre, de la propriété d'être coupés proportionnellement par celle de ces courbes dont les branches se rapprochent le plus de l'axe des abscisses.

427. Démontrons maintenant que les paraboles sont toutes

des courbes semblables. Pour cela, soit (*fig.* 153) O le sommet commun de deux paraboles, placées de manière qu'elles aient le même axe des abscisses; menons par le point O la droite OM qui les rencontre en M et en N, ces points, étant sur les courbes, satisferont à leurs équations; de sorte que si nous représentons par x et y et par x' et y' les coordonnées OP, PM et OQ, QN de ces points, et par $2p$ et $2p'$ les paramètres des deux paraboles, nous aurons Fig. 153.

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad y'^2 = 2p'x';$$

mais les triangles rectangles OMP, ONQ qui ont l'angle commun O, étant semblables, nous donnent, entre ces coordonnées,

$$\text{NQ} : \text{OQ} :: \text{PM} : \text{OP},$$

ou
$$y' : x' :: y : x;$$

donc
$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \ldots\ldots\ldots\ldots (320)$$

428. Maintenant, soit F le foyer de la parabole OM (*fig.* 153); menons le rayon vecteur FM, et par le point N tirons la parallèle NL à ce rayon vecteur; les triangles semblables LNQ, FMP donneront la proportion Fig. 153.

$$\text{LQ} : \text{QN} :: \text{FP} : \text{PM},$$

ou
$$x' - \text{OL} : y' :: x - \text{OF} : y. \ldots\ldots (321)$$

Mais le paramètre $2p$ de la courbe OM étant égal à quatre fois la distance du sommet au foyer, nous avons

$$\text{OF} = \tfrac{1}{2}p \ldots\ldots\ldots\ldots (322)$$

Au moyen de cette valeur, la proportion (321) devient

$$x' - \text{OL} : y' :: x - \tfrac{1}{2}p : y,$$

d'où nous tirerons

$$x' - \mathrm{OL} = \frac{y'}{y}(x - \tfrac{1}{2}p),$$

et par conséquent

$$\mathrm{OL} = x' - \frac{x}{y}y' + \tfrac{1}{2}p\frac{y'}{y}.$$

Mettant dans le second membre de cette équation la valeur de $\frac{x}{y}$ fournie par l'équation (320), nous réduirons cette valeur de OL à

$$\mathrm{OL} = \tfrac{1}{2}p\frac{y'}{y};$$

multipliant par x les deux termes du second membre, il vient

$$\mathrm{OL} = \tfrac{1}{2}p\frac{xy'}{yx},$$

ou

$$\mathrm{OL} = \tfrac{1}{4}\,2px\frac{y'}{xy};$$

mettant y^2 à la place de $2px$, cette équation se réduit à

$$\mathrm{OL} = \tfrac{1}{4}\frac{y}{x}y';$$

remplaçant $\frac{y}{x}$ par sa valeur donnée par l'équation (320), et mettant ensuite $2p'x'$ à la place de y'^2, il reste

$$\mathrm{OL} = \tfrac{1}{2}p'; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (323)$$

donc le point L est le foyer de la seconde parabole.

429. Si nous comparons entre elles les valeurs de OF et de OL, données par les équations (322) et (323), nous en déduirons

$$\mathrm{OF} : \mathrm{OL} :: p : p'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (324)$$

Nous allons voir que x et x' sont dans le même rapport : en effet, les triangles semblables OPM, OQN donnent Fig. 153.

$$OP : OQ :: PM : QN,$$

ou

$$x : x' :: y : y';$$

les carrés étant encore en proportion, on a

$$x^2 : x'^2 :: y^2 : y'^2;$$

remplaçant y^2 et y'^2 par leurs valeurs $2px$ et $2p'x$, supprimant le facteur commun 2 et changeant les moyens, nous obtiendrons

$$x^2 : px :: x'^2 : p'x';$$

divisant le premier rapport par x et le second par x', cette proportion deviendra

$$x : p :: x' : p';$$

en changeant de nouveau les moyens, on aura

$$x : x' :: p : p'.$$

Mais les triangles OMF, ONL étant semblables parce que NL est parallèle à MF, nous donnent

$$OM : ON :: OF : OL;$$

et comme le rapport de OF à OL, d'après la proportion (324), est égal à celui de p à p', nous avons enfin

$$OM : ON :: p : p'.$$

On démontre de même (*fig.* 154) qu'en menant par le point O une autre corde OM′ qui rencontre en N′ la seconde courbe, on a encore Fig. 154.

$$OM' : ON' :: p : p',$$

donc

$$OM : ON :: OM' : ON';$$

ce qui prouve que OM et OM′ étant coupés proportion-

nellement par la seconde courbe Om, deux paraboles quelconques sont des courbes semblables. Et si l'on considère que la similitude des triangles OMM′, ONN′ établit que les cordes MM′, NN′ sont dans le rapport de p à p', il sera facile de prouver que les polygones inscrits aux deux courbes sont dans ce rapport, et qu'il en est de même des arcs de paraboles, limite des côtés de ces triangles.

Puisque dans les deux paraboles superposées nous avons trouvé un centre d'où partent des rayons qui les coupent proportionnellement, concluons de l'art. 428 que les rayons vecteurs, partis d'un même foyer, jouissent de la même propriété.

430. Cherchons maintenant l'équation des courbes semblables. Pour cela, soit m le rapport des rayons homologues OM et ON (*fig.* 155); nous aurons $\frac{OM}{ON} = m$. Mais les coordonnées des deux courbes étant aussi dans le même rapport, si x et y désignent les coordonnées du point M, et x' et y' celles du point N, nous avons

Fig. 155.

$$OM : ON :: OP : OQ :: PM : QN,$$

où

$$OM : ON :: x : x' \quad :: y : y',$$

et par conséquent,

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = m;$$

on tire de ces équations

$$x = mx', \quad y = my',$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation en x et en y que nous représenterons par $F(x, y) = 0$, on aura l'équation

$$F(mx', my') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (325)$$

dans laquelle faisant varier l'indéterminée m, on obtiendra toutes les équations des courbes semblables à celles dont l'équation est $F(x, y) = 0$.

431. Prenons par exemple l'ellipse dont l'équation est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

En remplaçant x et y par mx' et par my', nous aurons

$$m^2 a^2 y'^2 + m^2 b^2 x'^2 = a^2 b^2;$$

divisant par m^2, cette équation deviendra

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = \frac{a^2 b^2}{m^2},$$

et peut être écrite ainsi

$$\frac{a^2}{m^2} y'^2 + \frac{b^2}{m^2} x'^2 = \frac{a^2}{m^2} \times \frac{b^2}{m^2}; \quad \ldots\ldots \quad (326)$$

et l'on voit qu'elle représente une ellipse dans laquelle les axes seraient $\frac{a}{m}$ et $\frac{b}{m}$.

L'équation (326) étant comparée à une autre représentée par

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2,$$

on voit qu'ayant disposé de la quantité arbitraire m en posant $a' = \frac{a}{m}$, nous n'aurons pas une seconde condition pour que le demi-petit axe b' appartienne à la courbe semblable. Cette similitude n'existera que dans le cas particulier où l'on aura $b' = \frac{b}{m}$. Il suit de là que les ellipses ne sont pas toutes des courbes semblables. Ce que nous disons de l'ellipse peut s'appliquer à l'hyperbole; mais il n'en est pas de même de la parabole, comme nous l'avons vu. C'est ce dont nous pouvons encore nous assurer de la manière suivante :

432. Ayant substitué dans l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole les valeurs $x = mx'$ et $y = my'$, nous obtiendrons cette équation

$$m^2 y'^2 = 2pmx',$$

d'où nous tirerons

$$y'^2 = \frac{2p}{m} x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (327)$$

Or, une parabole quelconque dont l'équation est

$$y'^2 = 2p'x,$$

sera toujours comprise dans l'équation générale (327), en disposant de m par cette condition,

$$p' = \frac{p}{m},$$

ce qui nous donne lieu de reconnaître de nouveau que toutes les paraboles sont des courbes semblables.

433. Supposons que les deux courbes n'aient pas la même origine, mais que leurs axes soient parallèles; si l'on nomme OC, a et CD, b (*fig.* 156) les coordonnées de l'origine de la seconde courbe, bien entendu que a et b seront positifs ou négatifs, selon le cas; on pourra remplacer x' par $x - a$, et y' par $y - b$ dans l'équation (325) des courbes semblables, qui deviendra

Fig. 156.

$$F[m(x-a),\ m(y-b)] = 0,$$

et appartiendra à toutes les courbes semblables et semblablement situées, comme on le voit *fig.* 156.

Enfin, on peut donner plus de généralité à l'équation des courbes semblables, si dans l'équation $F(mx, my) = 0$, nous remplaçons x et y par les valeurs de ces coordonnées tirées des équations (288), et alors la courbe intérieure pourra avoir une position quelconque à l'égard de la première.

CHAPITRE XXVI.

Des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, etc., et de la détermination des racines des équations par l'intersection des courbes.

434. Lorsqu'un problème dépend de deux équations à deux inconnues, on peut considérer ces équations comme celles de deux courbes qui ont les mêmes coordonnées aux points où elles se rencontrent : par conséquent, si l'on élimine y, la valeur de x sera l'abscisse du point de rencontre. Prenons pour exemple ce problème, qui est fameux chez les anciens (*) :

435. *Trouver un cube double d'un autre.*

Représentons par k le côté d'un cube donné, et par x celui du cube que l'on cherche, nous aurons l'équation

$$x^3 = 2k^3; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (328)$$

supposons

$$x^2 = 2py. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (329)$$

Nous voyons qu'il sera facile d'éliminer x du premier membre de l'équation (328), car l'équation (329) nous donnera $x^4 = 4p^2y^2$; en mettant cette valeur de x^4 dans l'équation (328), multipliée par x, nous trouverons $4p^2y^2 = 2k^3x$, et en divisant par $4p^2$ et réduisant, on aura

$$y^2 = \frac{k^3x}{2p^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (330)$$

(*) On sait que lorsque Platon parcourait la Carie, il rencontra des habitants de Délos qui lui proposèrent ce problème, alarmés des prédictions des devins qui les menaçaient d'épouvantables malheurs, s'ils ne doublaient pas l'autel d'Apollon, dont la forme était cubique. (*Voyez* mes *Vies des plus grands hommes de l'antiquité.*)

et l'équation (328) sera remplacée par le système des deux équations (329) et (330), qui, par l'élimination de y, reproduiront la proposée.

Fig. 157. Ayant donc tracé (*fig.* 157) les axes rectangulaires AX, AY, le point A sera le sommet de deux paraboles, dont l'une aura AY pour axe des abscisses et $2p$ pour paramètre, et dont l'autre aura AX pour axe des abscisses, et $\frac{k^3}{p^2}$ pour paramètre.

L'abscisse AP du point où ces paraboles se rencontreront sera le côté du cube demandé.

436. Nous avons ici deux paraboles à construire; mais l'opération eût été plus facile si, au lieu de l'une de ces courbes, nous eussions eu un cercle. Pour parvenir à ce but, nous observerons d'abord que les valeurs de x et de y subsistant simultanément au point de rencontre dans les équations (329) et (330), il en sera de même si nous ajoutons ensemble ces équations; dans ce cas nous aurons

$$x^2 + y^2 = \frac{k^3}{2p^2}x + 2py. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331)$$

Fig. 158. Il sera facile de reconnaître ici (*fig.* 158) l'équation d'un cercle dont l'origine des coordonnées est à l'extrémité A de la corde AB parallèle à OD : en effet, soient x et y les coordonnées AP et PM d'un point M de la circonférence, $AE = a$, $EO = b$ celles du centre, et r le rayon OM; le triangle rectangle OMQ nous donne

$$OQ^2 + MQ^2 = OM^2,$$

ou

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

développant et transposant les constantes, on obtient

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2;$$

le second membre se réduisant à zéro en vertu du triangle rectangle AEO, il reste

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by;$$

cette équation nous montre que l'équation (331) appartient à un cercle qui a pour coordonnées du centre la moitié de $\frac{k^3}{2p^2}$ et p.

Le point d'intersection de ce cercle avec l'une de nos paraboles; par exemple avec celle qui est le lieu de l'équation (329), nous donnera une seconde solution du problème.

Après avoir construit, à l'aide de l'équation (329), une parabole sur l'axe AY (*fig.* 158), on déterminera le centre O du cercle en prenant $AE = \frac{1}{2}\left(\frac{k^3}{2p^2}\right)$, et en élevant à l'extrémité de AE la perpendiculaire $EO = p$; on décrira alors avec le rayon OA un cercle qui coupera la parabole au point M, dont l'abscisse AP sera le côté du cube cherché. Fig. 158.

437. On pourrait aussi résoudre le même problème par l'intersection de la parabole et de l'hyperbole; en effet, soit une parabole qui ait pour équation

$$x^2 = ay; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (332)$$

si l'on introduit cette valeur de x^2 dans l'équation (328), on trouvera

$$axy = 2k^3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (333)$$

et l'on voit que les courbes qui appartiennent aux équations (332) et (333) par leur intersection, résoudront le problème; mais que la construction de l'hyperbole sera plus difficile à exécuter que celle du cercle.

Observons que l'équation (328) n'ayant qu'une racine réelle (*), il en résulte qu'il n'y a qu'un point d'intersection entre les courbes.

438. Le problème de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux nombres, non moins célèbre dans l'antiquité,

---

(*) Pour le démontrer, remplaçons $2k^3$ par n^3k^3 dans l'équation (328), et faisons passer le second membre dans le premier, nous avons l'équation

$$x^3 - n^3k^3 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (334)$$

à laquelle on satisfait en faisant $x = nk$; donc l'équation (334) est divi-

se résout de la même manière. En effet, soient a et b ces deux nombres; si nous représentons par x et par y deux moyennes proportionnelles, nous aurons, par la nature de la question,

$$a : x :: x : y, \quad x : y :: y : b;$$

ce qui nous fournit les équations

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \ldots\ldots\ldots (335)$$

et nous voyons qu'on déterminera x par l'abscisse du point d'intersection des deux paraboles. Tirant la valeur de x de la seconde des équations (335), et la substituant dans la première, on obtiendra $y^3 = ab^2$, équation de même forme que l'équation (328), à laquelle donne lieu le problème de la duplication du cube, ab^2 étant une constante aussi bien que $2k^3$.

439. Le problème de la trisection de l'angle, que nous avons résolu (art. **156**), nous conduit à une équation du troisième degré, dont la racine réelle se détermine de la même manière.

En effet, si nous faisons évanouir le diviseur r^2 de l'équation (117) (*page* 98), nous aurons

$$x^3 - 3r^2x + ar^2 = 0;$$

multipliant cette équation par x, elle devient

$$x^4 - 3r^2x^2 + ar^2x = 0, \ldots\ldots (336)$$

et l'on voit qu'en faisant

$$x^2 = ny, \ldots\ldots\ldots\ldots (337)$$

---

sible exactement par $x - nk$; effectuant cette division, nous pouvons remplacer $x^3 - n^3k^3 = 0$ par $(x - nk)(x^2 + nkx + n^2k^2) = 0$.

Pour décomposer en facteurs $x^2 + nkx + n^2k^2 = 0$, nous résoudrons cette équation du second degré, et nous trouverons

$$x = -\tfrac{1}{2}nk \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}n^2k^2};$$

par conséquent, l'équation (334) revient à

$$(x - nk)\left(x + \tfrac{1}{2}nk - \sqrt{-\tfrac{3}{4}n^2k^2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2}nk + \sqrt{-\tfrac{3}{4}n^2k^2}\right) = 0;$$

donc il n'y a qu'un des trois facteurs de l'équation (334) qui soit réel.

l'équation (336) deviendra

$$n^2y^2 - 3r^2ny + ar^2x = 0,$$

et donnera

$$y^2 = \frac{3r^2}{n}y - \frac{ar^2x}{n^2};$$

ajoutant cette équation à l'équation (337), on obtiendra

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3r^2}{n} + n\right)y - \frac{ar^2}{n^2}x, \quad . \quad . \quad (338)$$

équation du cercle qui, avec l'équation (337), résoudra le problème en faisant couper la parabole qui appartient à l'équation (337), par le cercle qu'on déterminera, comme dans l'art. **436**.

440. En général, une équation à une seule inconnue x étant donnée, on pourra la considérer comme le résultat de l'élimination de y entre les équations de deux courbes qui ont x et y pour coordonnées. Lorsque ces courbes sont du second ordre, la proposée ne pourra surpasser le quatrième degré; et entre les équations du second degré qui par l'élimination peuvent donner la proposée, les plus simples seront préférables : on se conduira pour leur choix, comme dans l'exemple suivant.

441. Soit l'équation $x^4 - px^2 - qx - r = 0$: je prends arbitrairement l'équation

$$x^2 = ay, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (339)$$

qui est celle d'une parabole; la valeur de x^2 qu'elle me donne étant mise dans la proposée, j'obtiens

$$a^2y^2 - pay - qx - r = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (340)$$

ou plutôt

$$y^2 - \frac{py}{a} - \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (341)$$

Cette équation est encore celle d'une parabole.

L'équation (339) n'offre aucune difficulté dans sa construc-

tion; car elle est celle d'une parabole M'AM'', qui ayant son sommet à l'origine A (*fig.* 159), a pour axe des abscisses AY, pour axe des ordonnées AX, et dont le paramètre est a.

Fig. 159.

442. La construction de la courbe donnée par l'équation (340) s'exécutera lorsqu'on aura fait dépendre cette courbe d'une équation plus simple, ce qui demande quelques préparations : pour cet effet, soit en général l'équation

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + \ldots + Ry + S = 0 \ldots (342)$$

L'Algèbre nous apprend (*) que si dans cette équation on substitue

$$y' - \frac{B}{mA} \text{ à } y,$$

on obtiendra une autre équation en y' du même degré, mais qui sera délivrée du terme affecté de la puissance $m - 1$ de l'inconnue. D'après cette remarque, on pourra donc faire évanouir le second terme de l'équation (340), en supposant, d'après la comparaison des équations (340) et (342),

$$y = y' + \frac{p}{2a}, \ldots\ldots\ldots (343)$$

(*) Pour le démontrer, ayant divisé par A cette équation, faisons

$$y = y' + \alpha,$$

elle devient

$$\begin{array}{l|l|l}
y'^m + m\alpha & y'^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)\alpha^2 & y'^{m-2} + \text{etc.} \\
\quad + \frac{B}{A} & \quad + \frac{B}{A}(m-1)\alpha & \quad + \text{etc.} \\
 & \quad + \frac{C}{A} & \quad + \text{etc.}
\end{array}$$

On peut déterminer la quantité arbitraire α en égalant à zéro le coefficient de y'^{m-1}, ce qui donnera

$$\alpha = -\frac{B}{mA};$$

mettant cette valeur dans l'équation $y = y' + a$, on obtient

$$y = y - \frac{B}{mA}.$$

et l'équation (341) se réduira à

$$y'^2 - \frac{p^2}{4a^2} - \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^2} = 0,$$

ou plutôt à

$$y'^2 = \frac{q}{a^2}\left(x + \frac{p^2 + 4r}{4q}\right),$$

ou à

$$y'^2 = \frac{q}{a^2}\,x', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (344)$$

en faisant

$$x + \frac{p^2 + 4r}{4q} = x';$$

et l'équation (344) construira la même courbe que l'équation (341), mais avec une origine différente.

Pour former cette courbe, l'équation (343) nous donnant

$$y - y' = \frac{p}{2a},$$

on voit (*fig.* 159) que toute ordonnée PM construite avec l'équation (341) diffère de $\frac{p}{2a}$ de l'ordonnée QM déterminée par l'équation (344), et qui correspond à la même abscisse AP. Or, l'axe AX étant relatif à l'équation (341), si à une distance $AA' = \frac{p}{2a}$ de cet axe, on mène une parallèle A'X', toutes les ordonnées construites d'après l'équation (341) se trouveront raccourcies (*) de $\frac{p}{2a}$; on voit de même que, puisque

$$x' = x + \frac{p^2 + 4r}{4q},$$

(*) Elles seraient allongées de $\frac{p}{2a}$, si cette quantité était négative, et le nouvel axe tomberait au-dessous de AX.

chaque abscisse x' doit différer de x d'une quantité

$$\frac{p^2 + 4r}{4q} = \mathrm{A'\,A''}.$$

Le point A″ sera donc l'origine des x'. Ayant construit la parabole sur l'axe A″ X′ au moyen de l'équation (343), cette courbe, considérée relativement à l'origine A, aurait été donnée par l'équation (341) (*).

Donc, si l'on élimine y entre les équations (339) et (341), les abscisses AP′, AP″, AP‴, AP^{IV} seront les valeurs de x communes aux deux équations (339) et (341), et par conséquent seront les racines de l'équation

$$x^4 - px^2 - qx - r = 0.$$

443. Si les courbes ne se rencontraient pas en quatre points, l'équation proposée aurait des racines imaginaires.

444. L'intersection de la ligne droite et du cercle nous a servi (chapitre IV) pour construire les équations du second degré; les intersections des courbes du second ordre suffiront pour construire les équations du troisième et du quatrième degré.

Ainsi, pour construire $\sqrt[3]{a}$, je supposerai $x = \sqrt[3]{a}$, donc $x^3 = a$. Cette équation étant de la même forme que celle que le problème de la duplication du cube nous a donnée (art. **435**), se résoudra de la même manière, en prenant pour la seule racine réelle de x l'abscisse du point d'intersection de deux paraboles.

(*) On voit que la construction de la courbe sur l'axe AX, au moyen de l'équation (341), se réduit à changer d'axe pour construire la courbe avec une équation plus simple, et ensuite à reprendre l'axe AX et l'équation qui s'y rapporte.

CHAPITRE XXVII.

Des sections coniques et cylindriques.

445. Les quatre courbes dont nous avons fait connaître les propriétés, le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, sont celles que les anciens ont comprises sous le nom de *sections coniques*, parce qu'on les obtient suivant la manière dont on coupe le cône par un plan.

Prenons un cône droit, et supposons qu'il soit coupé par un plan qui passe par son axe, on sait, d'après la génération même du cône, que la section sera un triangle SAB (*fig.* 160). Menons un plan CDMM′ perpendiculaire à ce triangle; suivant la direction que prendra la commune section CD du plan sécant avec le plan de ce triangle SAB, on déterminera la nature de la courbe formée par la section de la surface du cône. Fig. 160.

Ainsi, comme nous allons le démontrer, on aura l'ellipse si cette commune section, partant d'un point C du côté AS, rencontre l'autre côté SB en un point D; tandis que si la commune section (*fig.* 161) est dirigée suivant CD′, de manière qu'elle ne puisse atteindre le côté SB du triangle que sur le prolongement SD′ de ce côté, la droite CD′ n'atteindra jamais SB, quelle que soit la grandeur du cône; dans ce cas, la section de la surface donnée sera une hyperbole. Fig. 161.

Enfin l'intersection commune CD″ peut se trouver parallèle au côté SB du cône, et alors SB et CD″ ne s'atteindront jamais, et la section sera celle d'une parabole; mais, si le point de rencontre est à l'extrémité D‴ de la parallèle CD‴ à la base AB du triangle ABC, la section sera un cercle.

446. Démontrons maintenant que, dans le cas où la droite CD rencontre les deux côtés AS, BS du cône (*fig.* 160), la courbe que le plan coupant détermine sur la surface convexe de ce cône est une ellipse. Pour cela, soit (*fig.* 160) un cône droit; Fig. 160. Fig. 160.

Fig. 160. faisons passer par l'axe de ce cône le plan SAB ; ce plan, parce qu'il renferme cet axe, sera perpendiculaire à la base du cône, et par conséquent aux sections circulaires EMF, GM'H parallèles à cette base. Par les deux points C et D des côtés SA, SB, du triangle SAB, menons ensuite un plan CMD perpendiculaire à celui du triangle SAB, les plans CMD, EMF étant perpendiculaires au plan SAB, leur commune section PM (d'après un théorème de Géométrie) sera aussi perpendiculaire au plan SAB. Il en sera de même de la commune section P'M' fournie par la rencontre des plans CM'D et GM'H. Or, il est évident que les extrémités P et P' de ces communes sections tomberont sur CD, puisque cette droite renferme tous les pieds des perpendiculaires situées dans le plan sécant. On voit en outre que les communes sections MP, M'P' sont à la fois des ordonnées des cercles EMF, GM'H, et de la courbe CMD. Cela posé, les triangles CEP, CGP', à cause des parallèles EF, GH, sont semblables et donnent

$$EP : GP' :: CP : CP'.$$

Les mêmes parallèles établissent cette autre proportion entre les triangles DPF et DP'H, dont elles prouvent la similitude :

$$PF : P'H :: PD : P'D;$$

multipliant ces proportions par ordre, nous avons

$$EP \times PF : GP' \times P'H :: CP \times PD : CP' \times P'D.$$

Dans le cercle, les carrés des ordonnées étant égaux aux produits des abscisses correspondantes, on peut remplacer les deux premiers termes de cette proportion par le rapport de MP^2 à MP'^2, et l'on a

$$MP^2 : M'P'^2 :: CP \times PD : CP' \times P'D;$$

on tire de là

$$MP^2 = M'P'^2 \times \frac{CP \times PD}{CP' \times P'D} :$$

or, si le second cercle a été mené de manière que le pied P'

de la perpendiculaire M'P tombe sur le milieu de CD, nous aurons CP' = P'D, et l'équation précédente deviendra

$$MP^2 = \frac{M'P'^2}{CP'^2}(CP \times PD); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (345)$$

mais CP' et M'P' sont les demi-axes a et b de l'ellipse, et si nous nommons CP, x, PD aura pour expression $2a - x$, et nous pourrons remplacer le produit CP × PD par $(2a - x)x$; au moyen de ces valeurs, on pourra convertir l'équation (345) en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

qui est la même que celle de l'art. **270**.

447. Dans le cas où la droite CD (*fig.* 160) devient parallèle à AB, et où par conséquent les côtés SC et SD sont égaux, il est évident que la section est un cercle. Fig. 160.

448. Considérons maintenant le cas où la ligne CD (*fig.* 162) n'atteint le côté SB que sur son prolongement. Fig. 162.

Si de deux points M et M' on abaisse également des perpendiculaires MP et M'P' sur le plan du triangle ASB, et que par ces points on fasse passer des cercles parallèles à la base, ces perpendiculaires MP et M'P' se confondront avec les ordonnées des cercles aux points M et M', et les triangles semblables CEP, CGP' donneront

$$EP : GP' :: CP : CP';$$

d'un autre côté, la similitude des triangles RPF, RP'H donnera

$$PF : P'H :: RP : RP'.$$

Multipliant ces proportions par ordre, on obtient

$$EP \times PF : GP' \times P'H :: CP \times RP : CP' \times RP';$$

les deux premiers termes de cette proportion, n'étant autre chose que les produits des abscisses des cercles EMF, GM'H aux points P et P', peuvent être remplacés par les carrés des

ordonnées correspondantes à ces points : on a donc

$$PM^2 : P'M'^2 :: CP \times PR : CP' \times RP',$$

ou

$$PM^2 : P'M'^2 :: CP \times (CR + CP) : CP' \times (CR + CP');$$

or, si nous observons que CR est une quantité constante que nous pouvons représenter par $2a$, et que CP et CP′ sont deux abscisses de la courbe que nous pouvons désigner par x et x', correspondantes aux ordonnées $PM = y$ et $P'M' = y'$, cette dernière proportion devient, en y substituant ces valeurs,

$$y^2 : y'^2 :: x(2a + x) : x'(2a + x');$$

ce qui prouve que les carrés des ordonnées sont comme les produits des distances des pieds de ces perpendiculaires aux deux sommets de la courbe situés à un même côté, propriété de l'hyperbole.

On tire de la proportion précédente

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'(2a + x')}(2ax + x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (346)$$

et si l'on prend pour x' et pour y' les coordonnées du centre O, milieu du grand axe $2a$, la valeur de x' étant négative, puisque nous comptons les abscisses du sommet B (*fig.* 148), on fera $x' = -a$; à l'égard de y', comme cette ordonnée qui a son pied au point O n'atteint pas la courbe, elle est imaginaire; et, en effet, l'équation (346) nous donne

Fig. 148.

$$y'^2 = \frac{y^2}{2ax + x^2}(2ax' + x'^2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347)$$

et, en remplaçant x' par $-a$, ce qui est entre les parenthèses se réduit à $-a^2$, et l'équation (347) devient

$$y'^2 = \frac{y^2}{2ax + x^2} \times -a^2;$$

or l'abscisse x étant par hypothèse positive (*), la valeur de y'^2 se réduit à une quantité négative de deux dimensions, que nous représenterons par $-b^2$; ce qui donnera

$$y' = b\sqrt{-1}\ (**),$$

et l'on trouvera

$$y^2 = \frac{-b^2}{-a(2a-a)}(2ax + x^2);$$

réduisant, on obtient

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

équation dans laquelle on reconnaît celle de l'hyperbole rapportée au sommet (art. **300**).

449. Dans le cas où la commune section du plan sécant avec le plan SAB (*fig.* 163), auquel il est perpendiculaire, est parallèle à l'un des côtés, il est facile de démontrer que la section de la surface du cône est une parabole. En effet, si par les points M et M′ nous menons les perpendiculaires MP, M′P′ sur le plan SAB qui passe par l'axe, ces perpendiculaires, d'après ce qui précède, se confondront avec les ordonnées des cercles EMF, GM′H abaissées des points M et M′ sur la commune section; par la propriété du cercle, nous aurons Fig. 163.

$$PM^2 = EP \times PF,$$

$$P'M'^2 = GP' \times P'H;$$

donc $\quad PM^2 : P'M'^2 :: EP \times PF : GP' \times P'H.$

Mais, à cause des parallèles, on a

$$PF = P'H.$$

(*) Dans la partie négative de l'axe des x, $2ax$ et x^2 restent positifs, parce qu'ils sont le produit de deux quantités négatives.

(**) Nous avons vu (art. **303**) que l'équation de l'ellipse devient celle de l'hyperbole en changeant b en $b\sqrt{-1}$, parce que le petit axe de l'hyperbole est imaginaire.

Cette valeur réduit la proportion précédente à

$$PM^2 : P'M^2 :: EP \times PF : GP' \times PF.$$

Supprimant le facteur commun, il reste

$$PM^2 : P'M'^2 :: EP : GP';$$

mais les triangles semblables CEP, CGP′ nous donnent

$$EP : GP' :: CP : CP'.$$

Remplaçant le rapport de EP à GP′ par celui de CP à CP′ dans la proportion précédente, nous la convertirons en

$$PM^2 : P'M'^2 :: CP : CP';$$

d'où nous tirerons

$$PM^2 = \frac{P'M'^2}{CP'} CP. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (348)$$

Or, si nous regardons CP′ comme une constante (*), P′M′ en sera une autre, et nous verrons que $\frac{P'M'^2}{CP'}$ est une troisième proportionnelle qui représente une ligne m; et CP et PM étant deux coordonnées que nous pouvons appeler x et y, l'équation (348) deviendra

$$y^2 = mx,$$

équation dans laquelle on reconnaît celle de la parabole; car la constante m n'est autre chose que celle qui est désignée par $2p$ (art. **318**).

450. Passons maintenant aux sections cylindriques. D'après la génération du cylindre à base circulaire, il n'est pas besoin de démontrer que toute section faite par un plan parallèle à la base est un cercle; et il est de même évident que si l'on fait passer un plan par l'axe du cylindre, les sections AG, BH, seront des droites parallèles à l'axe.

(*) Tous les carrés des ordonnées ont avec leurs abscisses le même rapport; d'ailleurs la distance arbitraire CD′ peut devenir celle du sommet au foyer, qui est constante.

Soit maintenant un plan GABH (*fig.* 164) dans lequel l'axe est renfermé; coupons-le par un plan qui lui soit incliné, et dont CD représente l'intersection; partageons cette ligne en deux parties égales au point O, et faisons Fig. 164.

$$OP = x, \quad PM = y.$$

Cela posé, les triangles PEC, PDF sont semblables, à cause des angles opposés au sommet en P, et des angles alternes-internes PCE, PDF, et nous aurons la proportion

$$CP : DP :: EP : PF; \ldots\ldots (349)$$

d'où nous tirerons

$$CP + DP : DP :: EP + PF : PF;$$

ou

$$CD : DP :: EF : PF,$$

et, en changeant les moyens,

$$CD : EF :: DP : PF, \ldots\ldots\ldots (350)$$

l'ordonnée PM deviendra égale au rayon du cylindre, lorsque son pied P coïncidera avec le milieu O de CD. Dans ce cas, au lieu du cercle EMF, nous aurons un cercle E'M'F' parallèle à l'autre et plus rapproché de la base AB. Or, l'intersection commune M'O sera, comme appartenant à l'ellipse, le demi-petit axe, et, comme appartenant au cercle, devra être un rayon, puisque les sections parallèles à la base sont des cercles égaux. Appelons b l'un de ces rayons, et a la moitié CO de CD, nous aurons donc

$$E'F' \text{ ou } EF = 2b, \quad \text{et} \quad CD \text{ ou } 2CO = 2a;$$

et en prenant O pour origine, on a

$$DP = a - x, \quad CP = a + x. \ldots\ldots (351)$$

La proportion (350), comparée à la proportion (349), dans laquelle on changera les moyens, nous donne

$$CD : EF :: CP : EP. \ldots\ldots (352)$$

Remplaçons les trois premiers termes des proportions (350)

et (352) par leurs valeurs analytiques, équations (351), on trouvera

$$2a : 2b :: a - x : \mathrm{PF}, \quad 2a : 2b :: a + x : \mathrm{EP};$$

supprimant le facteur commun 2, et multipliant ces proportions par ordre, il viendra

$$a^2 : b^2 :: (a - x)(a + x) : \mathrm{PF} \times \mathrm{EP},$$

ou $$a^2 : b^2 :: (a^2 - x^2) : \mathrm{PF} \times \mathrm{EP}; \quad \ldots\ldots (353)$$

or, PF et EP étant les abscisses correspondantes à l'ordonnée PM du cercle de la section, leur produit pourra être remplacé par y^2, et par conséquent la proportion (353) peut se changer en celle-ci :

$$a^2 : b^2 :: a^2 - x^2 : y^2;$$

d'où nous tirerons

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Nous reconnaissons là l'équation de l'ellipse; ce qui nous apprend que la section du cylindre par un plan incliné à sa base est une ellipse.

451. Cette propriété du cylindre est bien moins remarquable que celles du cône dans lequel les anciens avaient aperçu les premiers le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole; c'est pour cette raison qu'ils appelaient les courbes du second ordre, *sections coniques*. Mais l'avantage qu'offre le cône de les rassembler, ainsi que la ligne droite, a bien perdu de son prix, depuis que la géométrie de Descartes a changé la face de la science, et qu'on a pu rattacher ces fameuses courbes à un système général. Nous verrons, en effet, que l'Algèbre les classe mieux, et qu'elles sont toutes comprises dans l'équation complète du second ordre à deux inconnues, qui nous fournit même la preuve qu'il n'en peut exister d'autre dans cet ordre. C'est le sujet intéressant que nous allons traiter dans le chapitre suivant. (*Note seizième.*)

CHAPITRE XXVIII.

De l'influence des constantes, de l'équation générale des courbes du second ordre sur la nature et la position de la courbe.

452. Les trois courbes que nous avons analysées sont comprises dans l'équation générale

$$y^2 = mx + nx^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (354)$$

qui nous donne l'ellipse lorsque, dans le second membre, m seul est positif, car l'équation (173) de cette courbe rapportée au sommet (art. **270**), écrite ainsi, en supprimant les accents,

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

est de même forme que l'équation

$$y^2 = mx - nx^2.$$

La formule générale donne l'hyperbole lorsque m seul est, dans le second membre, négatif, car l'équation (202) de l'hyperbole rapportée au sommet (art. **300**), écrite ainsi, en supprimant les accents,

$$y^2 = -\frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

est comprise dans l'équation

$$y^2 = -mx + nx^2.$$

Enfin l'équation (354) représente évidemment une parabole lorsque $n = 0$, car elle se réduit à

$$y^2 = mx,$$

qui est composée comme celle de la parabole (art. **317**).

Mais il s'en faut de beaucoup que l'équation (354) ait toute la généralité possible; aussi n'avons-nous considéré l'ellipse, l'hyperbole et la parabole que dans des cas particuliers. Par exemple, nous avons toujours supposé que les deux premières de ces courbes avaient pour axe des x une ligne qui, passant par le centre, partageait toutes les ordonnées en deux parties égales; nous n'avons pas considéré le cas où cet axe ne passerait point par le centre, et même serait hors de la courbe : sous ces différents points de vue, les équations de ces courbes se compliquent, et nous allons prouver que l'équation générale du second degré à deux inconnues, dans ses modifications, renferme tous ces cas.

453. Cette équation, dans son acception la plus étendue, peut être représentée par

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad . \quad . \quad (355)$$

En la résolvant par rapport à y, on trouve

$$\left.\begin{array}{r} y = -\frac{1}{2A}(Bx + D) \\ \pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF} \end{array}\right\}; \quad (356)$$

et, en la résolvant par rapport à y, on trouve

$$\left.\begin{array}{r} x = -\frac{1}{2C}(By + E) \\ \pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC) + 2(BE - 2CD)y + E^2 - 4CF} \end{array}\right\}. \quad (357)$$

Simplifions-la d'abord en représentant la partie radicale par $\sqrt{X}$, l'équation (356) deviendra

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \pm \sqrt{X}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (358)$$

Faisant un instant abstraction de la partie radicale, nous n'au-

rons plus que

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \ldots\ldots\ldots (359)$$

454. Il est facile de reconnaître (art. **212**), dans cette équation, celle d'une ligne droite BC (*fig.* 165) qui coupe les deux axes sur leur prolongement, de telle manière que lorsqu'on fait $x = \mathrm{OP}$ (*fig.* 165), y ou plutôt $-\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}$, devient PC; mais on voit aussi que les constantes A, B et D étant susceptibles d'être positives ou négatives, la position de RS peut avoir une de celles que nous avons examinées art. **209**, **210**, **211** et **212**, c'est-à-dire être située d'une manière quelconque. Pour fixer les idées, laissons la droite RS comme elle est représentée dans la *fig.* 165, et examinons ce qui arrive lorsqu'on a égard au radical, ainsi que l'exige l'équation (358) : cette équation nous montre que y aura deux valeurs différentes, qui correspondront à la même abscisse. Fig. 165.

Pour déterminer l'une, il faudra ajouter à PC, qui représente la partie rationnelle, une longueur $\mathrm{CM} = \sqrt{X}$; alors PM vaudra

$$-\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A} - \sqrt{X}.$$

Pour obtenir l'autre valeur de y, qui ne diffère de celle qu'on vient de déterminer que par le radical qui est d'un signe contraire, il faudra donc porter CM dans un sens opposé, c'est-à-dire de C en M'.

455. Ce que nous disons des points M et M' donnés par une même solution, devant s'appliquer à tous les points déterminés deux à deux pour chaque valeur de x, on conçoit que la droite indéfinie RS doit partager toutes les cordes parallèles à l'axe des ordonnées en deux parties absolument égales.

456. On peut remarquer que l'axe OY des ordonnées est oblique à la droite RS, et que, pour qu'il la coupât à angle droit, il faudrait que BC fût parallèle à OX; ce qui exigerait

que l'équation (359) de la ligne BC se réduisît à

$$y = -\frac{D}{2A};$$

condition remplie, lorsque $\frac{B}{2A} = 0$, et, par conséquent, lorsque le coefficient B du produit xy est nul. Cette hypothèse exigerait donc que l'équation (355) ne contînt point de terme en xy; ce que nous ne supposons pas, puisque nous prenons cette équation dans toute sa généralité. Enfin si B et D étaient nuls, l'équation (359) du diamètre BC se réduirait à $y = 0$: donc le diamètre RS se confondrait avec l'axe des abscisses.

457. D'après ce qui précède, la droite RS coupant obliquement toutes les cordes parallèles à OY en deux parties égales, il suit de là que cette droite est un diamètre.

458. En considérant la partie rationnelle de l'équation,

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} \pm \sqrt{X}, \quad \ldots\ldots \quad (360)$$

on peut remarquer que si dans l'équation particulière qu'elle représente, B et D ont des signes différents de celui qui affecte A, les coefficients $-\frac{B}{A}x$ et $-\frac{D}{A}$ deviennent positifs. Dans ce cas l'équation (360) prend la forme

$$y = \frac{B}{A}x + \frac{D}{A} \pm \sqrt{X}, \quad \ldots\ldots \quad (361)$$

la première des valeurs de y étant entièrement positive déter-
Fig. 166. mine, au moyen de l'ordonnée PM (*fig.* 166) (*), un point M situé dans l'angle YOX; quant à la seconde valeur de y, elle

(*) Pour ne point multiplier inutilement les figures, on a tracé seulement l'ellipse; mais notre analyse s'applique également aux autres courbes du second ordre.

déterminera un autre point N également situé dans le même angle, pourvu que la partie négative $-\sqrt{X}$ ne l'emporte pas sur $\frac{B}{A}x + \frac{D}{A}$, en sorte que ces deux points M et N appartiendront à une corde MN placée au-dessus de l'axe des x (*), et l'on conçoit que s'il en est de même de tous les autres points de la courbe, elle peut être entièrement située au-dessus de l'axe des x; mais, en prenant le signe inférieur du radical, lorsque $-\sqrt{X}$ surpasse $\frac{B}{A}x + \frac{D}{A}$, l'équation (361) indique un point N′ qui se trouvera au-dessous de l'axe des x, comme on le voit dans la *fig.* 167; et alors les points déterminés par l'équation (360), dans cette seconde hypothèse, se trouvant l'un au-dessus de l'axe des x, et l'autre au-dessous, la corde MN′ coupera cet axe.

459. Enfin si, au contraire, B et A, D et A conservent les mêmes signes, les termes de l'équation (360) ne seront pas altérés, et il se pourra que la courbe soit entièrement située au-dessous de l'axe des x et même la coupe.

460. Au reste, on peut reconnaître immédiatement quand cette rencontre a lieu; car il est facile de s'apercevoir qu'elle ne peut être qu'au point où y est nul. Faisons donc $y = 0$ dans l'équation (355); elle se réduit à

$$Cx^2 + Ex + F = 0, \quad \ldots\ldots \quad (362)$$

et, en divisant par C, à

$$x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (363)$$

(*) Il est possible qu'il n'y ait qu'un des coefficients qui change de signe. Dans ce cas, les mêmes raisonnements que nous venons d'employer, nous conduisent à des conclusions pareilles.

et donne, par sa résolution,

$$x = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

Lorsque F et C sont de signes différents, la valeur de x devenant

$$x = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4C^2} + \frac{F}{C}},$$

est toujours possible (*Note dix-septième*); mais elle devient imaginaire lorsque, dans l'équation (364), F et C étant de mêmes signes, $\frac{E^2}{4C^2}$ est moindre que $\frac{F}{C}$, ou est égal à zéro.

461. Lorsque $F = 0$, l'équation (362) devient

$$Cx^2 + Ex = 0,$$

et, décomposée en facteurs, peut se mettre sous cette forme

$$x\left(x + \frac{E}{C}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365)$$

Pour savoir ce que signifie la première valeur, il faut se rappeler que, pour parvenir à l'équation (362), nous avons supposé $y = 0$; cette hypothèse subsistant toujours, la coïncidence des équations $y = 0$, $x = 0$, montre que l'origine est sur la courbe. Le second facteur de l'équation (365) nous donne $x = -\frac{E}{C}$; ce qui nous annonce qu'à la distance $-\frac{E}{C}$ de l'origine, la courbe est rencontrée par l'axe des abscisses. Cette distance $-\frac{E}{C}$ se réduit à zéro lorsque E est aussi nul, et l'on voit que, dans ce cas, l'axe des abscisses devient une tangente à la courbe.

462. Mais lorsque le seul coefficient E de l'équation (362) est nul, et que F et C sont de différents signes, l'équa-

tion (363) se réduit à

$$x^2 - \frac{F}{C} = 0,$$

et donne

$$x = \pm \sqrt{\frac{F}{C}}.$$

Ces deux valeurs égales et de signes contraires de x montrent que l'origine est au milieu de la partie de l'axe des abscisses interceptée par la courbe.

463. Lorsque l'équation (355) ne remplit pas la condition nécessaire pour que la courbe rencontre l'axe AB des abscisses (*fig.* 168), cette courbe ne peut donc tomber qu'au-dessus ou au-dessous de cet axe; par conséquent, en prenant une droite A′B′ ou A″B″ qui coupe la courbe, et soit parallèle à AB, toutes les ordonnées construites sur AB différeront des ordonnées construites sur A′B′ ou A″B″, d'une quantité constante β, qui, suivant le cas, pourra être positive ou négative; de sorte qu'en faisant Fig. 168.

$$y = y' + \beta,$$

β exprimera la différence PP′ des ordonnées $y =$ PM et $y' =$ P′M, ou la différence PP″ des ordonnées PM et P″M. Substituant donc $y' + \beta$ dans l'équation (355), on aura

$$Ay'^2 + B\left|\begin{array}{l} xy' + Cx^2 + 2A\beta \\ \qquad\qquad + D \end{array}\right| \begin{array}{l} y' + E \\ \quad + B\beta \end{array}\left|\begin{array}{l} x + A\beta^2 \\ \quad + D\beta \\ \quad + F \end{array}\right| = 0; \ldots \quad (366)$$

et représentant par f le dernier terme, par e et par d les coefficients de y' et de x, cette équation deviendra

$$Ay'^2 + Bxy' + Cx^2 + dy' + ex + f = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367)$$

La condition nécessaire pour que la courbe rencontre l'axe, étant (d'après l'équation 364, art. **460**) que $\frac{e^2}{4C^2} - \frac{f}{C}$ soit une quantité positive, on pourra toujours disposer convenable-

ment de β, qui entre dans e et dans f, pour que $\frac{e^2}{4C^2} - \frac{f}{C}$ soit une quantité positive. Alors la valeur de x, qui correspond à $y = 0$, aura (art. **460**) ses deux racines réelles re-
Fig. 169. présentées (*fig.* 169) par les abscisses A′R, A′R′; et la courbe coupera le nouvel axe en deux points.

464. On peut maintenant ne plus considérer que le nouvel axe. Abandonnant l'axe primitif et l'équation (355) qui s'y rapporte, il nous sera permis de supprimer les accents, que nous n'avons donnés à y, dans l'équation (367), que pour distinguer ses ordonnées de celles qui étaient comptées sur l'axe primitif AX, dont il ne sera plus question, et l'équation (367) deviendra, en rétablissant les majuscules dans les trois derniers termes,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \ldots \quad (368)$$

et pourra être regardée comme celle qui se rapporte (*fig.* 169) à l'axe A′X′. (*Note dix-huitième.*)

465. Substituons dans l'équation (368) les valeurs $y' + \beta = y$ et $x' + \alpha = x$, nous trouverons

$$\left.\begin{array}{r|r|l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + B\alpha & y' + B\beta & x' + A\beta^2 \\ 2A\beta & & + B\alpha\beta \\ D & + 2C\alpha & + C\alpha^2 \\ & + E & + D\beta \\ & & + E\alpha \\ & & + F \end{array}\right\} = 0 \ldots (369)$$

Déterminant α et β par la condition que les coefficients de x' et de y' soient nuls, nous aurons entre α et β les équations

$$B\alpha + 2A\beta + D = 0,$$

$$B\beta + 2C\alpha + E = 0;$$

on tirera de ces équations

$$\alpha = \frac{2\,AE - DB}{B^2 - 4\,AC}, \qquad \beta = \frac{2\,CD - EB}{B^2 - 4\,AC}. \quad . \; . \; . \; (370)$$

L'hypothèse de $B^2 - 4\,AC = 0$, qui rend ces valeurs infinies, rentre dans un cas que nous examinerons bientôt. Pour le moment, nous supposerons que $B^2 - 4\,AC$ ne soit pas nul.

Cela admis, si dans le dernier terme de l'équation (369) délivrée des termes nuls dont nous avons disposé, nous substituons les valeurs de α et de β, et que nous représentions ce dernier terme par f, l'équation deviendra

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + f = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; (371)$$

et l'origine se transportera en un point O (*fig.* 169), qui sera tel, qu'en faisant $y' = 0$, dans l'équation (371), on trouvera pour l'abscisse x', comptée de ce point, les deux valeurs égales OI, OI′, et de signes contraires, Fig. 169.

$$+\sqrt{-\frac{f}{C}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{f}{C}}, \; . \; . \; . \; (372)$$

et qu'en faisant $x' = 0$, on trouvera pour l'ordonnée y' les deux valeurs égales OL, OL′, et de signes contraires,

$$+\sqrt{-\frac{f}{A}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{f}{A}}; \; . \; . \; . \; (373)$$

ce point O, dont nous ferons connaître les propriétés, unique dans la courbe, porte le nom de *centre*. Les expressions (372) et (373)

$$\sqrt{-\frac{f}{A}}, \; \sqrt{-\frac{f}{C}}$$

seront réelles ou imaginaires, selon que les deux termes de la fraction seront de différents signes ou de mêmes signes (*). (*Note dix-neuvième.*)

(*) Quand A et C sont de différents signes, l'un des axes est réel et l'autre imaginaire : par exemple, si f et C sont négatifs, la valeur $\sqrt{-\frac{f}{C}}$ du

Si l'on ne veut plus considérer que les nouveaux axes II′, LL′ (*fig.* 169) et l'équation qui s'y rapporte, on pourra supprimer les accents, et l'on aura

Fig. 169.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + f = 0, \quad . \quad . \quad (374),$$ *équation générale des courbes à centre.*

466. Examinons maintenant quelle est l'influence du coefficient B sur la courbe.

Nous avons vu que la partie rationnelle de la valeur de y donnait lieu à l'équation de la droite

$$y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A},$$

qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{B}{2A}$, tangente qui appartient à un angle obtus si B et A sont de mêmes signes, et à un angle aigu s'ils sont de signes différents. Cette droite coupera l'axe des ordonnées ou son prolongement à une distance exprimée par $-\frac{D}{2A}$, selon que cette expression sera positive ou négative; ce qui exige que D et A soient de signes différents dans le premier cas, ou de mêmes signes dans le second. Le diamètre devient parallèle à l'axe des x quand la tangente trigonométrique $-\frac{B}{2A}$ devient nulle, et enfin, se confond avec l'axe des x, quand on a à la fois

$$-\frac{B}{2A} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{D}{2A} = 0.$$

---

demi-axe des x' est imaginaire; mais C étant négatif, il faut que A soit positif, puisque, par hypothèse, A et C sont de différents signes. On prouverait de même que si A et C sont de mêmes signes, les deux axes sont réels; et, comme ce qui distingue l'ellipse de l'hyperbole est que l'ellipse a ses deux axes réels, tandis que l'hyperbole n'en a qu'un; il suit de là que la courbe appartient à l'ellipse quand A et C sont de mêmes signes, et à l'hyperbole quand ces signes sont différents.

467. On peut ajouter que, lorsque B n'est pas nul et que $\frac{B}{2A}$ est positif, l'angle qui fait le diamètre avec la direction de l'axe des abscisses est d'autant plus grand que B augmente; car la tangente trigonométrique de cet angle étant $\frac{B}{2A}$, cette expression s'accroît en même temps que son numérateur.

468. Le terme Bxy subsistant dans l'équation (355), il en résulte (art. 455) que les cordes que nous portons parallèlement à l'axe des ordonnées (*fig.* 170) étant partagées en deux parties égales par le diamètre, ne peuvent l'être par l'axe des abscisses incliné à cet axe, comme nous l'avons vu (art. 456). Pour qu'elles fussent rectangulaires, il faudrait, d'après ce qui précède, que le terme en xy disparût, ce qui exigerait que l'axe des x changeât de direction; car alors il pourrait faire un angle droit avec les ordonnées relatives à cet axe. Soient donc OX′ (*fig.* 170) le nouvel axe des abscisses, p l'angle inconnu X′OX qu'il forme avec OX, et x', y' les coordonnées rectangulaires OQ et QM d'un point M de la courbe rapporté au nouvel axe OX′ des abscisses; et, à l'aide de la transformation des coordonnées, voyons si, en passant de l'équation (374) à celle qui se rapporterait à l'axe OX′, nous ne pourrons pas disposer de l'angle arbitraire p, pour faire évanouir le terme en xy de la nouvelle équation.

Pour cela, comme il est question de passer d'un système de coordonnées rectangulaires (*fig.* 170) $x = \text{OP}$ et $y = \text{PM}$, à un autre système de coordonnées rectangulaires $x' = \text{OQ}$ et $y' = \text{MQ}$, nous mettrons dans l'équation (374) les valeurs de x et de y fournies par les formules (284), page 238, et nous obtiendrons cette transformée : Fig. 170.

$$\begin{array}{l|l|l|l}
A\sin^2 p & x'^2 + 2A\sin p\cos p & x'y' + A\cos^2 p & y'^2 + f = 0 \ldots (375) \\
+ B\sin p\cos p & \quad - B\sin^2 p & \quad - B\sin p\cos p & \\
+ C\cos^2 p & \quad + B\cos^2 p & \quad + C\sin^2 p & \\
 & \quad - 2C\sin p\cos p & &
\end{array}$$

Divisant par $\cos^2 p$, réduisant, remplaçant $\frac{\sin p}{\cos p}$ par $\operatorname{tang} p$, et observant que le dernier terme devient $\frac{f}{\cos^2 p} = (1 + \operatorname{tang}^2 p) f$, parce que le rayon étant une moyenne proportionnelle entre le cosinus et la sécante, on a (art. 368) $\frac{1}{\cos} =$ *sécante*, et par conséquent $\frac{1}{\cos^2} =$ *sécante*^{2}, ou $\frac{1}{\cos^2 p} = 1 + \operatorname{tang}^2 p$, on trouve

$$\begin{array}{r|l|l|l}
A \operatorname{tang}^2 p & x'^2 + 2A \operatorname{tang} p & x'y' + A & y'^2 + (1 + \operatorname{tang}^2 p) f = 0 \ldots (376) \\
+ B \operatorname{tang} p & \quad - B \operatorname{tang}^2 p & \quad - B \operatorname{tang} p & \\
+ C & \quad + B & \quad + C \operatorname{tang}^2 p & \\
 & \quad - 2C \operatorname{tang} p & &
\end{array}$$

Telle est l'équation qui existe entre les nouvelles coordonnées x' et y' comptées sur un axe OX', qui fait un angle p avec la direction de l'axe primitif OX des abscisses.

469. Cet angle p étant arbitraire, déterminons-le par la condition que le coefficient de $x'y'$ soit nul; l'angle p sera donc donné par l'équation de condition

$$2A \operatorname{tang} p - B \operatorname{tang}^2 p + B - 2C \operatorname{tang} p = 0, \ldots \quad (377)$$

et l'équation (376) se réduira à

$$\begin{array}{r|l|l}
A \operatorname{tang}^2 p & x'^2 + A & y'^2 + (1 + \operatorname{tang}^2 p) f = 0 \ldots (378) \\
+ B \operatorname{tang} p & \quad - B \operatorname{tang} p & \\
+ C & \quad + C \operatorname{tang}^2 p &
\end{array}$$

L'équation (377) servira à déterminer p de la manière suivante :

Ordonnant par rapport à p, et changeant les signes, il viendra

$$B \operatorname{tang}^2 p + 2C \operatorname{tang} p - 2A \operatorname{tang} p - B = 0;$$

divisant par B, et faisant un seul coefficient des termes affectés de la première puissance de tang p, on aura

$$\text{tang}^2 p - 2\,\frac{(A - C)}{B}\,\text{tang}\,p - 1 = 0\,;$$

résolvant cette équation du second degré, on obtiendra

$$\text{tang}\,p = \frac{(A - C)}{B} \pm \sqrt{\frac{(A - C)^2}{B^2} + 1}, \quad . \; . \; (379)$$

valeur qui n'est jamais imaginaire, parce que l'expression qui est sous le radical, se composant de l'unité et d'un carré, est essentiellement positive : donc il est toujours possible de déterminer l'angle p.

470. Substituant la valeur de tang p dans l'équation (378), on obtiendra une nouvelle équation que nous représenterons par

$$Px'^2 + Qy'^2 + R = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (380)$$

et qui se rapportera à l'un des axes OB et OD (*fig.* 170), formant avec l'axe OX des angles dont les tangentes seront telles, que l'ordonnée rectangulaire positive sera toujours de même longueur que l'ordonnée négative qui en est le prolongement.

471. Laissons seul dans le second membre le terme constant R de l'équation (380), après l'avoir rendu positif s'il ne l'était pas, en changeant tous les signes de l'équation. Ce second membre étant par hypothèse positif, le premier devra l'être aussi, et par conséquent ne pourra renfermer qu'une somme de quantités positives, ou qu'une différence : dans le premier cas, l'équation (380) prendra la forme de

$$Px'^2 + Qy'^2 = R\,;$$

dans le second, l'équation (380) ne nous offrira que ces deux

combinaisons :

$$Px'^2 - Qy'^2 = R,$$
$$Qy'^2 - Px'^2 = R.$$

Divisant ces trois équations par R, nous aurons

$$\frac{P}{R}x'^2 + \frac{Q}{R}y'^2 = 1,$$
$$\frac{P}{R}x'^2 - \frac{Q}{R}y'^2 = 1,$$
$$\frac{Q}{R}y'^2 - \frac{P}{R}x'^2 = 1,$$

les coefficients $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$ étant des quantités essentiellement positives, parce que P, Q et R le sont, dans notre hypothèse, où nous avons examiné tous les cas. Représentons ces fractions renversées par a'^2 et par b'^2, nos trois équations deviendront

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$
$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$
$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{x'^2}{a'^2} = 1;$$

chassant les dénominateurs, nous obtiendrons

$$b^2x'^2 + a'^2y'^2 = a'^2b'^2,$$
$$b^2x'^2 - a'^2y'^2 = a'^2b'^2,$$
$$a^2y'^2 - b'^2y'^2 = a^2b^2.$$

Nous reconnaissons dans la première l'équation de l'ellipse, et dans les deux autres, celles de l'hyperbole rapportée au grand et au petit axe. Il n'est pas besoin d'avertir que, dans ces derniers cas, il n'y a qu'un axe de réel.

472. Nous avons vu (art. 465) que l'hypothèse où l'ex-

pression $B^2 - 4AC$ n'est pas nulle nous conduisait à l'équation des courbes à centre

$$Ay^2 + Bx'y' + Cx'^2 + f = 0;$$

il nous reste à examiner le cas où $B^2 - 4AC = 0$.

Cette équation nous donne

$$B = 2\sqrt{AC};$$

substituant cette valeur dans l'équation générale (367), que nous reproduisons ici en supprimant les accents,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + dy + ex + f = 0, \quad . \quad . \quad (381)$$

elle deviendra

$$Ay^2 + 2xy\sqrt{AC} + Cx^2 + dy + ex + f = 0, \quad . \quad . \quad (382)$$

ou plutôt, parce que les trois premiers termes forment un carré parfait,

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + dy + ex + f = 0.$$

Substituant ici ces valeurs données par les équations (284) (page 238),

$$x = x' \cos p - y' \sin p,$$
$$y = x' \sin p + y' \cos p,$$

on aura

$$\left[(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})\, x' + (\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C})\, y'\right]^2 + \left.\begin{matrix} d\sin p \\ + e\cos p \end{matrix}\right| \begin{matrix} x' + d\cos p \\ - e\sin p \end{matrix} \left| y' + f = 0. \quad . \quad . \quad (383)\right.$$

En développant la partie radicale, on trouve pour le carré qui est dans l'équation (383)

$$(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})^2 x'^2 + 2(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})(\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C})\, x'y' + (\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C})^2 y'^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (384)$$

résultat qui nous montre que le terme en $x'y'$ devient nul, lorsqu'on dispose de la quantité arbitraire p, en faisant

$$(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})(\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C}) = 0.$$

Cette équation peut être satisfaite de deux manières, en égalant l'un ou l'autre de ses facteurs à zéro.

Si c'est le premier, le coefficient de x'^2 de l'équation (384) devient nul; si c'est le second, le coefficient de y'^2 devient nul : donc le terme en $x'y'$ ne peut s'évanouir sans faire évanouir en même temps l'un des termes en x'^2 ou en y'^2.

473. Pour conserver, comme dans les autres courbes, le terme en y'^2, nous ferons évanouir le terme en x'^2, et alors l'équation $\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C} = 0$, jointe à celle-ci, $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$, déterminera les valeurs de $\sin p$ et de $\cos p$, qu'on mettra dans l'équation (383); et, supprimant les accents, qui ne servent qu'à distinguer la nouvelle équation de la précédente, et deviennent inutiles lorsqu'on ne veut plus considérer que cette dernière, nous réduirons l'équation (383) à la forme

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (385)$$

474. Nous ne pouvons maintenant être indécis sur le choix de celui des deux termes By et Cx que nous ferons disparaître; car, la valeur de $x + \alpha$ mise à la place de x, n'introduisant pas l'indéterminée α dans son coefficient, il devient impossible de pouvoir égaler ce coefficient à zéro. On sent d'ailleurs que, le terme en x^2 manquant, si le terme en x pouvait s'évanouir, l'équation (385), réduite à la forme $Ay^2 + By + D = 0$, ne déterminerait que deux valeurs pour y, et par conséquent ne pourrait plus servir à construire une courbe.

Ce sera donc le terme affecté de la première puissance de y que nous ferons évanouir : substituant, dans l'équation (385), $y' + \beta$ à la place de y, égalant à zéro le coefficient de y'

de la transformée et supprimant les accents, nous la réduirons à la forme

$$Py^2 + Qx + R = 0,$$

ou à $Py^2 + Q\left(x + \frac{R}{Q}\right) = 0$, et par conséquent à $Py^2 + Qx = 0$, en égalant l'abscisse $x + \frac{R}{Q}$ à une autre abscisse x (*).

Enfin, si l'on divise par P les deux termes de l'équation

$$Py^2 + Qx = 0,$$

et qu'on fasse

$$\frac{Q}{P} = p,$$

l'équation précédente deviendra

$$y^2 + px = 0.$$

Il est facile de reconnaître, dans cette équation, le caractère de la parabole; car cette équation donne

$$y = \pm\sqrt{-px},$$

et montre que p et x doivent être de signes contraires, pour que la valeur de y soit réelle : par conséquent, les deux branches infinies de la courbe, données par la double valeur de y, ne peuvent s'étendre que dans un sens, qui sera celui des abscisses négatives, si p est positif, ou celui des abscisses positives, si p est négatif. Comme c'est ordinairement dans ce

(*) On aurait pu faire évanouir à la fois les termes By et D, au moyen des valeurs $y + \beta$ et $x + \alpha$ mises à la place de x et de y; mais on serait parvenu au même résultat. En effet, que l'on substitue à la fois ces valeurs de x et de y, ou qu'on substitue celle de y pour déterminer β avant de substituer la valeur de $x + \alpha$, le nouveau terme en y est le même dans les deux cas, ainsi qu'on peut le vérifier.

dernier sens que l'on considère la parabole, nous aurons donc

$$y^2 - px = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 = px,$$ *équation de la parabole.*

475. Si A ou C était nul dans l'équation (355), la courbe appartiendrait à l'hyperbole. Par exemple, si l'on avait $C = 0$, en résolvant l'équation (355) par rapport à y, on tomberait sur l'équation (356), qui se réduirait à

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A};$$

et, en observant qu'un carré x^2 surpasse d'autant plus sa racine x, que l'on prend pour x des nombres plus élevés, on conçoit qu'il peut exister une valeur numérique de x, telle que le premier terme B^2x^2 soit plus grand que la somme des deux autres, que nous représenterons par $Qx + R$. Alors le signe du résultat de tous les termes qui sont sous le radical, dépendra de celui du premier B^2x^2.

Or B^2x^2, composé du produit de deux carrés, étant essentiellement positif, il en résulte que ce qui est sous le radical devient une quantité d'autant plus grande que x s'accroît, et que par conséquent la courbe se partage en quatre branches qui s'étendent jusqu'à l'infini; savoir, deux dans le sens des x positifs et deux autres dans le sens des x négatifs.

476. Si c'est, au contraire, A qui est nul, la valeur donnée par l'équation précédente ayant $2A$ pour dénominateur, est infinie. Dans ce cas on a recours, pour analyser la courbe, à l'équation (357), qui devient

$$x = -\frac{(By + E)}{2C} \pm \frac{\sqrt{B^2y^2 + 2(BE - 2CD)x + E^2 - 4CF}}{2C},$$

et qui, par les mêmes raisonnements, nous conduit à reconnaître que la courbe est une hyperbole.

477. Lorsque A et C manquent à la fois, l'équation générale se réduit à

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

et donne

$$y = \frac{-Ex - F}{x + D},$$

et, en effectuant la division,

$$y = -E + \frac{ED - F}{x + D},$$

ou $$y + E = \frac{ED - F}{x + D}.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, en faisant

$$y + E = y', \quad x + D = x';$$

notre équation devient alors

$$y' = \frac{ED - F}{x'},$$

ou $$x'y' = ED - F,$$

et, en représentant $ED - F$ par m,

on a $$x'y' = m,$$

et l'on reconnaît ici l'équation de l'hyperbole entre ses asymptotes. (*Note vingtième.*)

CHAPITRE XXIX.

De la division des courbes du second ordre en genres.

478. On a vu, dans le chapitre précédent, que l'équation générale des courbes du second ordre peut appartenir au cercle, à l'ellipse, à l'hyperbole ou à la parabole, suivant les valeurs qu'on donne aux constantes de cette équation ou aux signes qui les affectent. Mais, sans recourir aux transformations dont nous avons fait usage, ne pourrait-on pas trouver un moyen

de déterminer immédiatement, par une équation de condition, à quelle sorte de courbe du second ordre appartient une équation de ce genre qui nous est donnée? C'est ce qui va faire la matière de ce chapitre. Dans ce but, en résolvant l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad . \quad . \quad (386)$$

par rapport à y, on trouve

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} \pm \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A}, \ldots (387)$$

et, en la résolvant par rapport à x, on trouve

$$x = -\frac{(By + E)}{2C} \pm \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BE - 2CD)y + E^2 - 4CF}}{2C} \ldots (388)$$

Pou rsimplifier, représentons le polynôme

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF,$$

qui est sous le radical de la valeur de y, par

$$Px^2 + Qx + R.$$

479. Nous avons fait entrevoir (art. **475**) qu'en augmentant convenablement la valeur de x, le premier terme de ce polynôme pouvait devenir supérieur à la somme des autres. Cette proposition étant fondamentale, on a cherché à la démontrer d'une manière rigoureuse, et l'on a trouvé que le plus grand des quotients $\frac{R}{P}$ et $\frac{Q}{P}$, que nous représenterons par S, étant ajouté à l'unité, forme un nombre qui, mis à la place de x, rend Px^2 plus grand que $Qx + R$; et que la même propriété appartient à tout nombre (*) plus grand que $S + 1$.

(*) Voici de quelle manière je le démontre : je mets le polynôme $Px^2 + Qx + R$ sous la forme

$$P\left(x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}\right),$$

et je vois que pour obtenir une valeur de x qui fasse devenir Px^2 supé-

Représentons par V ce nombre $S+1$ qui, mis à la place de x, rend le premier terme $(B^2-4AC)x^2$ plus grand que la somme des autres : le coefficient B^2-4AC, que nous avons représenté par P, pouvant être négatif ou positif, nous allons d'abord examiner ces deux hypothèses.

480. Supposons, en premier lieu, que B^2-4AC soit un nombre négatif : en faisant $x = V$, le premier terme

---

rieur à $Qx+R$, il suffit d'en déterminer une qui rende x^2 plus grand que $\frac{Q}{P}x+\frac{R}{P}$; car si x^2 surpasse $\frac{Q}{P}x+\frac{R}{P}$, en multipliant par P, on aura

$$Px^2 > Qx + R.$$

Cela posé, il est certain que si les termes $\frac{Q}{P}x$, $\frac{R}{P}$ sont de mêmes signes, et que x^2 surpasse leur somme, à plus forte raison x^2 surpassera la différence de ces termes : ainsi nous ne considérerons que le cas où $\frac{Q}{P}x$ et $\frac{R}{P}$ sont de mêmes signes. Soit S le plus grand des coefficients $\frac{Q}{P}$ et $\frac{R}{P}$, la fonction $Sx+S$ étant plus grande que $\frac{Q}{P}x+\frac{R}{P}$, si x^2 surpasse cette première fonction, il surpassera encore plus la seconde : ainsi tout se réduit à trouver une valeur de x qui rende x^2 supérieur à $Sx+S$. Supposons que $S+n$ soit cette valeur ; en la substituant dans les expressions x^2 et $Sx+S$, nous aurons

$$(S+n)^2 > S^2 + Sn + S,$$

ou, en développant le carré et réduisant,

$$2Sn + n^2 > Sn + S;$$

et par conséquent

$$Sn + n^2 > S \quad \text{ou} \quad (S+n)n > S.$$

Or, il est évident que pour toute valeur entière de n depuis l'unité jusqu'à l'infini, on satisfait à cette inégalité : donc si l'on substitue à x l'une des expressions $V=S+1$, $V=S+2$, $V=S+3$, etc., x^2 deviendra supérieur à $Sx+S$, et par conséquent à

$$\frac{Q}{P}x+\frac{R}{P}.$$

Il en est de même si les coefficients sont égaux.

$(B^2-4AC)V^2$ surpassera la somme de tous les autres; et, puisque notre hypothèse le rend négatif, la partie radicale de l'équation (387) deviendra imaginaire. Il en sera de même, si l'on substitue à x la valeur $-V$, parce que le carré de $-V$, qui entre dans le premier terme, est encore positif; ce qui fait que le facteur B^2-4AC détermine le signe. Ainsi l'on peut être assuré que les abscisses comprises depuis V jusqu'à l'infini, et depuis $-V$ jusqu'à l'infini négatif, correspondent toujours à des ordonnées imaginaires, et qu'en prenant, de chaque côté de l'origine, deux lignes OI et OI' (*fig.* 171) égales à V, la courbe considérée dans le sens des abscisses ne s'étendra pas hors de l'intervalle II'. Fig. 171.

481. Regardant ensuite x comme l'ordonnée et y comme l'abscisse, et portant l'abscisse y sur l'axe des y, et l'ordonnée parallèlement à celui des x, on verra (*fig.* 171) que tout point M de la courbe est aussi bien déterminé par les coordonnées $OP = x$ et $PM = y$ que par les coordonnées $OP' = y$ et $P'M = x$.

482. Voici donc une seconde manière de construire la même courbe, à l'aide de l'équation (388), qui, dans le premier terme de la fonction de y renfermée sous le radical, a encore pour coefficient B^2-4AC.

Et comme (art. **480**) nous avons établi l'hypothèse que B^2-4AC était négatif, en appliquant ici les raisonnements que nous avons faits dans cet article, on pourra donc prouver qu'il existe, sur la direction de l'axe OY, deux limites L et L' au delà desquelles les y correspondront toujours à des x imaginaires : donc la courbe ne pourra s'étendre, dans le sens des y, hors de LL', et sera entièrement comprise dans le rectangle RR'S'S. Telles sont les courbes du second ordre du premier genre, dans lesquelles on reconnaît l'ellipse (*).

(*) Dans l'ellipse nous comprenons le cercle, qui n'est qu'un cas particulier de cette courbe.

485. Supposons maintenant $B^2 - 4AC$ positif, et désignons toujours par V le nombre qui, étant substitué à x, a la propriété de rendre le premier terme $(B^2 - 4AC)x^2$ du radical de l'équation (387) plus grand que la somme de tous les autres. En substituant à x le nombre V ou le nombre $-V$, on obtiendra pour x^2 le même nombre positif V^2 : donc le produit de V^2 par $B^2 - 4AC$ sera du même signe que cette quantité $B^2 - 4AC$, qui, dans notre hypothèse, est positive ; et comme le premier terme $(B^2 - 4AC)V^2$ doit surpasser la somme des autres termes, qui sont sous le radical, on obtiendra un résultat positif ; par conséquent la valeur de y sera réelle, et tout nombre au-dessus de V, pris positivement ou négativement, aura la même propriété de rendre réelle l'expression radicale : donc, en prenant (*fig.* 172) une abscisse $OI = V$, on sera certain que toute abscisse plus grande correspondra à une ordonnée réelle, et qu'en prenant une abscisse $OI' = -V$, toute abscisse négative plus grande correspondra aussi à une ordonnée réelle ; de sorte que, menant par les points I et I' deux parallèles indéfinies RR', SS', qui coupent l'axe des abscisses à angles droits, on pourra affirmer que tout point de l'axe des abscisses qui n'est pas situé dans l'intervalle II' peut toujours être le pied d'une ordonnée de la courbe, et que par conséquent la courbe se prolonge indéfiniment hors de l'espace compris entre ces parallèles (*). Fig. 172.

Et comme, pour chaque valeur de x, l'équation de la courbe détermine toujours deux valeurs pour l'ordonnée, on peut

(*) Comme il ne nous a pas été nécessaire, dans la démonstration de la note de l'art. 479, d'examiner si quelques-uns des nombres inférieurs à V ne pouvaient pas aussi rendre le terme Px^2 plus grand que la somme des autres termes, on sent qu'il est possible qu'il existe dans l'intervalle II' des abscisses, telles que Or, pour lesquelles les ordonnées correspondantes seraient encore réelles ; mais nous ne considérons pas encore ces points : il nous suffit de pouvoir affirmer que hors des limites OI et OI', les abscisses correspondent toujours à des ordonnées réelles.

conclure que les valeurs positives de x donneront naissance aux deux branches KM, K′M′, qui s'étendront jusqu'à l'infini, en s'éloignant de l'origine;

Et que les valeurs négatives de x donneront naissance à deux branches LN, L′N′, qui s'étendront jusqu'à l'infini négatif, en s'éloignant de l'origine.

Enfin les ordonnées ne pourront être imaginaires que dans l'intervalle compris entre les parallèles indéfinies RR′, SS′, où les ordonnées correspondent à des abscisses positives ou négatives moindres que V.

Cette propriété qu'offre la courbe de se prolonger indéfiniment dans deux sens opposés, en se partageant en deux branches dans chacun de ces sens, suffit pour caractériser ce second genre de courbes, que l'on comprend sous le nom d'*hyperboles*.

Si l'on voulait compter les abscisses sur l'axe AY, comme nous l'avons fait (art. 482), on reconnaîtrait de même, au moyen de l'équation (388), que, de chaque côté de l'axe AY, il existe deux des quatre branches IM, I′M′, et LN et L′N′ qui s'étendent jusqu'à l'infini.

484. Lorsque le coefficient $B^2 - 4AC$ est nul, l'équation (387) se réduit à

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} + \frac{\sqrt{2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A}.$$

Soit V la valeur de x qui a la propriété de rendre le terme $2(BD - 2AE)x$ plus grand que $D^2 - 4AF$: si $2(BD - 2AE)$ est positif, V, ou toute valeur au-dessus, rendra positive l'expression qui est sous le radical; par con-
Fig. 173. séquent, si l'on prend pour abscisse $OI = V$ (*fig.* 173), il sera prouvé que depuis O jusqu'à l'infini, en allant à la droite, tout point pris sur l'axe des abscisses devra toujours correspondre à deux ordonnées réelles déterminées par la double valeur de y.

La courbe se partagera donc en deux branches, KM, K′M′,

qui se prolongeront chacune jusqu'à l'infini, dans le sens des abscisses positives.

Si l'on prend ensuite sur le prolongement de l'axe des abscisses la partie $OI' = -V$, toutes les abscisses comprises depuis OI', en allant à gauche, jusqu'à l'infini négatif, rendant négative l'expression qui est sous le radical, correspondront à des ordonnées imaginaires : donc, en menant par le point I' la droite indéfinie SS', qui coupe à angle droit le prolongement de l'axe des abscisses, la courbe devra être entièrement comprise d'un côté de cette droite.

Si $2(BD - 2AE)$ est négatif, et qu'on donne à x des valeurs négatives comprises (*fig.* 174) depuis $OI' = -V$ jusqu'à l'infini négatif, en allant à gauche, les valeurs de y seront réelles, parce que, dans ce cas, le premier terme $2(BD - 2AE)x$, composé de deux facteurs négatifs, deviendra positif, et rendra tel le résultat des termes qui sont sous le radical ; mais, en donnant à x des valeurs positives comprises depuis OI jusqu'à l'infini, en allant à droite, la partie radicale deviendra imaginaire : il est donc démontré que la courbe ne peut avoir des abscisses positives plus grandes que OI ; par conséquent, si au point I on mène, perpendiculairement à l'axe des abscisses, une droite indéfinie SS', la courbe sera entièrement comprise d'un côté de cette droite. Fig. 174.

Toute la différence qui existe donc entre l'hypothèse de $2(BD - 2AE)$ positif et de $2(BD - 2AE)$ négatif, est que la courbe se trouve située à droite ou à gauche de l'origine, sur l'axe des abscisses ou sur son prolongement.

Ainsi, lorsque le coefficient $B^2 - 4AC = 0$, la courbe, qui étend ses deux branches jusqu'à l'infini, peut être entièrement comprise d'un même côté d'une droite indéfinie.

La courbe du second ordre, qui appartient à ce troisième genre, est donc la parabole, puisque c'est la seule des trois courbes du second ordre qui s'étend à l'infini dans un seul sens.

485. Enfin, si le coefficient de x du radical est aussi nul,

l'équation (387), se réduisant à

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{2A},$$

ne renferme x et y qu'au premier degré, et appartient à la ligne droite, comme nous allons le voir d'une manière plus spéciale dans le chapitre suivant.

486. Il résulte de cette analyse, que l'on peut diviser les courbes du second ordre en trois genres, que l'on reconnaîtra aux caractères suivants :

Premier *genre* (ellipse). . . . $B^2 - 4AC$ . . *négatif;*
Deuxième *genre* (hyperbole).. $B^2 - 4AC$ . . *positif;*
Troisième *genre* (parabole). . $B^2 - 4AC$ . . *nul.*

CHAPITRE XXX.

Des cas particuliers où l'équation générale des courbes du second ordre ne peut construire l'une des trois courbes.

487. Lorsque l'équation générale du second ordre ne se rapporte pas à l'une des trois courbes que nous avons examinées, elle ne construit que des lignes d'un degré inférieur au second, ou des points, ou n'a aucune signification. Examinons d'abord le premier cas.

Lorsque $B^2 - 4AC = 0$ et que $BD - 2AE = 0$, nous venons de voir (art. **485**) que l'équation (387) (art. **485**) se réduisait à

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}. \quad . \quad . \quad . \quad (389)$$

Pour une valeur α de x, y a deux valeurs, que je représenterai par β et par 6; pour une autre valeur α' de x, l'équa-

tion donnera encore deux valeurs β' et $6'$ de l'ordonnée correspondante à α'; ainsi de suite.

Les ordonnées β, β', β'', etc., construiront la ligne droite; donc l'équation est

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} + \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}; \quad . \quad . \quad (390)$$

de même les ordonnées 6, $6'$, $6''$, etc., construiront une autre ligne qui sera le lieu de l'équation

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} - \frac{\sqrt{D^2 - 4AF}}{2A} \quad . \quad . \quad . \quad (391)$$

Comme le coefficient de x dans ces deux équations est le même, les deux droites formeront des angles égaux avec l'axe des abscisses, et par conséquent seront parallèles.

488. Si $D^2 - 4AF$ est aussi nul, l'équation (389) se réduit à

$$y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A};$$

et le système des deux parallèles données par les équations (389) et (391) se réduit à une seule droite.

489. Enfin, $\sqrt{D^2 - 4AF}$ peut être imaginaire; alors les valeurs de y données par les équations (390) et (391) restent imaginaires dans tous les cas, et il n'est plus possible que l'équation puisse construire un système de points.

490. Lorsque $B^2 - 4AC$ n'est pas nul, l'équation générale peut aussi se rapporter à des lignes droites; pour le démontrer, mettons l'équation (387) (art. 487), sous la forme

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \sqrt{x^2 + 2\frac{(BD - 2AE)}{B^2 - 4AC}x + \frac{D^2 - 4AF}{B^2 - 4AC}}.$$

Si la partie qui est sous le radical est un carré, on a

$$\left(\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}\right)^2 = \frac{D^2 - 4AF}{B^2 - 4AC};$$

d'où l'on tire

$$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF); \ldots (392)$$

lorsque cette équation est satisfaite, la valeur de y se réduit à

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\left(x + \frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}\right), \ldots (393)$$

et, en ordonnant par rapport à x, à

$$y = \frac{1}{2A}\left[(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})x \pm \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}} - D\right] \ldots (394)$$

491. Lorsque l'équation (392) est satisfaite, et que $B^2 - 4AC$ est positif, le radical est réel; alors il est facile de prouver, comme dans l'art. **487**, que l'équation (394) appartient au système de deux droites qui ne sont pas parallèles, puisque la valeur du coefficient de x donnée, en prenant le signe supérieur du radical, est différente de celle qu'on obtient en prenant le signe inférieur.

492. Lorsque $B^2 - 4AC$ est négatif, cas où la courbe est une ellipse (art. **486**), et que l'équation (392) est satisfaite, l'équation (394) contenant un terme imaginaire ne peut donner une valeur réelle pour y que lorsqu'on fait

$$x = -\frac{(BD - 2AE)}{B^2 - 4AC}; \ldots\ldots (395)$$

car alors, en y substituant la valeur de x donnée par l'équation (394), il vient

$$y = \frac{1}{2A}\left[(B \mp \sqrt{B^2 - 4AC})\frac{(BD - 2AE)}{B^2 - 4AC} \pm \frac{BD - 4AC}{\sqrt{B^2 - 2AE}} - D\right];$$

exécutant la multiplication indiquée par les parenthèses, et réduisant, il reste

$$y = \frac{1}{2A}\left[B\frac{(BD - 2AE)}{B^2 - 4AC} - D\right].$$

Ces deux valeurs de x et de y, étant constantes, montrent que l'ellipse se réduit alors à un point (art. **217**).

495. L'équation (393) n'a aucune signification lorsque y reste imaginaire; quelle que soit la valeur que l'on donne à x. Examinons les conditions de ce cas, et représentons par $Px^2 + Qx + R$ le polynôme qui est sous le radical de l'équation (387) (p. 306); cette équation étant mise sous la forme

$$y = -\frac{1}{2A}(Bx + D) \pm \sqrt{P\left(x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}\right)}, \quad . \quad . \quad (396)$$

il est certain que si pour toute valeur de x l'expression

$$x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}$$

est positive, et qu'en même temps P soit négatif, le polynôme $Px^2 + Qx + R$ étant alors le produit de deux facteurs de différents signes, sera négatif et donnera pour y une valeur imaginaire. Examinons donc dans quel cas le polynôme

$$x^2 + \frac{Qx}{P} + \frac{R}{P}$$

peut être toujours positif quel que soit x : pour cet effet, ajoutons à ce polynôme la quantité

$$\frac{Q^2}{4P^2} - \frac{Q^2}{4P^2},$$

nous aurons alors

$$x^2 + \frac{Qx}{P} + \frac{R}{P} = \left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 + \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2} \ldots (397)$$

Or un carré étant toujours positif, le second membre de cette équation restera toujours positif si $\frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}$ donne un résultat positif. Cette condition sera remplie lorsque R et P étant de mêmes signes, on aura

$$\frac{R}{P} > \frac{Q^2}{4P^2},$$

ou, en multipliant par $4P^2$,

$$4PR > Q^2.$$

Les deux conditions de P négatif et de P et R de mêmes signes reviennent à celle de P et R négatifs; donc la condition nécessaire pour que y soit toujours imaginaire est qu'on ait à la fois P et R négatifs et $4RP > Q^2$.

494. Dans le cas où l'on aurait $\frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}$ négatif, il est bien facile de voir que y pourrait avoir des valeurs réelles; car représentons cette quantité négative par $-\alpha^2$; si l'on multiplie l'équation (397) par P, on voit que le polynôme $Px + Qx + R$ se réduit, dans ce cas, à

$$P\left[\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 - \alpha^2\right].$$

Si P est positif, cette expression sera positive quand x deviendra assez grand pour que $\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2$ surpasse α^2, et si P est négatif, en donnant à x une valeur très-rapprochée de $-\frac{Q}{2P}$, on rendra le second facteur

$$\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 - \alpha^2$$

négatif comme le premier; dans ce cas, le polynôme sera donc encore positif.

495. Si, en comparant les radicaux des équations (387) et (396), on met à la place de P et de Q leurs valeurs, les trois conditions P et R *négatifs*, $4PR > Q^2$, nécessaires pour que y soit toujours imaginaire, deviennent

$$B^2 - 4AC = \textit{nombre négatif},$$

$$D^2 - 4AF = \textit{nombre négatif},$$

$$4(B^2 - 4AC)\ (D^2 - 4AF) > [2(BD - 2AE)]^2.$$

Cette dernière condition revient à

$$\sqrt{(B^2 - 4AC)\,(D^2 - 4AF)} > BD - 2AE.$$

Lorsque ces trois conditions sont remplies, l'équation de la courbe n'a aucune signification. (*Note vingt et unième.*)

496. Nous devrions terminer ici l'examen des cas où l'équation générale ne se rapporte pas à l'une des trois courbes, puisque le cercle dont il nous reste à parler est une ellipse dans laquelle le grand et le petit axe sont égaux; mais à cause de son importance, nous assignerons le caractère auquel on peut le reconnaître.

En développant l'équation du cercle (art. **236**), dans laquelle on remplace a par r, on trouve

$$y^2 + x^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (386) (p. 306), divisée par le coefficient de y^2, on voit que l'équation générale se réduira à la forme de celle du cercle, si l'on a

$$B = 0 \text{ et } \frac{C}{A} = 1, \text{ ou plutôt } C = A.$$

La condition de $B = 0$ fait voir que le diamètre parallèle à l'axe des abscisses aura la propriété de partager toutes les cordes qui lui seront menées perpendiculairement en deux parties égales, ce qui est la propriété commune à tous les diamètres du cercle.

La condition $C = A$ montre qu'après avoir fait évanouir les termes affectés des premières puissances de x et de y, l'équation réduite à la forme $Ay^2 + Cx^2 + E = 0$ donnera la même expression pour le grand et pour le petit axe.

—

CHAPITRE XXXI.

Des points donnés sur un plan par lesquels on peut faire passer une courbe du second ordre.

497. Proposons-nous de faire passer une courbe du second ordre par des points donnés sur un plan. Pour cela, remarquons d'abord que l'équation générale de cette courbe étant de cette forme

$$ay^2 + bxy + cx + dx + ex + f = 0,$$

contient six coefficients; on peut la réduire à cinq en divisant tous les termes par l'un de ces coefficients; admettons, par exemple, que ce soit par le dernier, nous pourrons supposer

$$\frac{a}{f} = \mathrm{A}, \quad \frac{b}{f} = \mathrm{B}, \quad \frac{c}{f} = \mathrm{C}, \quad \frac{d}{f} = \mathrm{D}, \quad \frac{e}{f} = \mathrm{E},$$

et notre équation prendra la forme

$$\mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}y + \mathrm{E}x + 1 = 0 \ldots \quad (398)$$

Cela posé, puisque, par hypothèse, les points donnés doivent être situés sur la courbe, si ces points sont au nombre de cinq, on sent que leurs coordonnées, mises successivement à la place de x et de y dans l'équation (398), suffiront pour éliminer les coefficients A, B, C, D, E, de sorte qu'il ne restera dans l'équation de la courbe qu'une fonction de ces coordonnées, c'est-à-dire qu'une fonction de quantités connues.

498. Soient maintenant m, n, p, q, r les points donnés; unissons quatre de ces points deux à deux, par des droites MN, PQ, qui seront des cordes; puisque, par hypothèse, les points sont sur la courbe, il pourra arriver deux cas où ces droites seront parallèles, comme dans la *fig.* 175; ou elles ne le seront pas : dans ce second cas, en les prolongeant, s'il le faut, elles se rencontreront en un point S (*fig.* 176, 177 et 178).

Fig. 175.

Prenons S pour origine et dirigeons les axes des coordonnées suivant les droites SP, SM (*fig.* 176, 177 et 178); les ordonnées étant parallèles à SM, seront obliques dans les *fig.* 176 et 177, et rectangulaires dans la *fig.* 178, et si nous désignons par β' et β'' les ordonnées des points M et N, comme ces points, par hypothèse, étant pris sur la courbe, sont situés sur l'axe même des ordonnées, ils auront SM et SN pour ordonnées, et leurs abscisses seront nulles, ces abscisses étant mesurées par la distance des pieds des ordonnées SM, SN au point S; d'où il suit que nous aurons,

Pour les coordonnées du point M, ... β', 0;

on trouvera de même qu'on a,

Pour les coordonnées de N, ... β'', 0.

D'une autre part,

pour le point P, l'ord. étant nulle, on a, coord. de P, α', 0;

pour le point Q, l'ord. étant nulle, on a, coord. de Q, α'', 0.

Quant aux coordonnées SG et GR du point R, nommons-les α et β, et substituons-les dans l'équation (398), ainsi que celles des autres points qu'on vient de déterminer; nous trouverons

$$A\beta'^2 + D\beta' + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (399)$$

$$A\beta''^2 + D\beta'' + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (400)$$

$$C\alpha'^2 + E\alpha' + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

$$C\alpha''^2 + E\alpha'' + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (402)$$

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + 1 = 0. \quad \ldots \quad (403)$$

499. Pour éliminer D entre les deux équations (399) et (400), nous multiplierons la première par β'', et la seconde par β'; et retranchant les résultats l'un de l'autre, nous obtiendrons

$$A(\beta'^2\beta'' - \beta''^2\beta') = \beta' - \beta'',$$

ou, à cause que $\beta'\beta''$ est facteur commun du premier membre, nous trouverons

$$A\beta'\beta''(\beta'-\beta'')=\beta'-\beta'';$$

d'où nous tirerons

$$A=\frac{1}{\beta'\beta''}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (404)$$

Cette valeur de A étant mise dans le premier terme de l'équation (399), nous aurons

$$\frac{\beta'}{\beta''}+D\beta'+1=0;$$

en divisant par β', on obtiendra

$$D=-\frac{1}{\beta''}-\frac{1}{\beta'},$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$D=-\frac{(\beta'+\beta'')}{\beta'\beta''}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (405)$$

En opérant de même sur les équations (401) et (402), on trouvera

$$C=\frac{1}{\alpha'\alpha''}, \qquad E=-\frac{(\alpha'+\alpha'')}{\alpha'\alpha''}; \quad \ldots\ldots \quad (406)$$

substituant dans l'équation (403) les valeurs A, de D, de C et de E, données par les équations (404), (405) et (406), nous trouverons

$$B=-\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\frac{\beta[\beta-(\beta'+\beta'')]}{\beta'\beta''}+\frac{\alpha[\alpha-(\alpha'+\alpha'')]}{\alpha'\alpha''}+1\right\}.$$

Introduisant les valeurs de A, de B, de C, de D et de E dans l'équation (398), on trouvera celle de la courbe cherchée, que

nous pourrons représenter par

$$f(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'', x, y) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (407)$$

500. Si les coordonnées de l'équation (407) sont obliques, comme cela doit arriver le plus souvent, et par conséquent se rapportent aux courbes construites sur les axes SN, SQ (*fig.* 176 et 177), on passera d'un système oblique d'axes à un système d'axes rectangulaires, au moyen des formules (289), et l'on reconnaîtra facilement la nature de la courbe, en examinant si les coefficients des termes en x^2, en y^2 et en xy satisfont aux conditions prescrites art. 486. Fig. 176 et 177.

501. Examinons maintenant le cas où les deux droites MN, PQ seraient parallèles (*fig.* 175); plaçons l'origine et l'axe des abscisses sur la direction de PQ, l'équation de la droite MN étant $y =$ constante, si nous représentons cette constante par b, et les abscisses des points M et N par α' et α'', Fig 175.

les coordonnées du point M seront $x = \alpha'$ et $y = b$;

celles du point N seront $x = \alpha''$ et $y = b$.

Substituant successivement ces coordonnées dans l'équation (398), nous aurons

Pour le point M, $Ab^2 + Bb\alpha' + C\alpha'^2 + Db + E\alpha' + 1 = 0$;

Pour le point N, $Ab^2 + Bb\alpha'' + C\alpha''^2 + Db + E\alpha'' + 1 = 0$.

Ces équations du second degré étant composées de la même manière, l'une en α' et l'autre en α'', donneront des valeurs identiques de α' et de α'', de sorte que les points α' et α'' exprimant la même condition, les données du problème seront réduites à quatre.

502. Quelquefois, au lieu d'assujettir la courbe du second ordre à passer par cinq points, on peut diminuer le nombre de ces points en l'assujettissant à remplir quelque condition. Par exemple, lorsqu'on veut que la courbe soit à centre, cette

condition en remplace deux des cinq qui sont données. En effet, en prenant le centre pour origine, l'équation de la courbe, dans ce cas, se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 1 = 0,$$

et ne renfermant que trois coefficients, peut être satisfaite lorsqu'au lieu de cinq points on en donne seulement trois.

503. Enfin, si la courbe doit être une parabole, la condition $B^2 - 4AC = 0$ fournissant une équation, il n'en faut plus que quatre pour déterminer les coefficients de l'équation (398); d'où il suit que quatre points suffisent pour déterminer la parabole.

504. Si, outre le centre, on donne l'angle des diamètres, on pourra faire passer une ellipse par deux points donnés par leurs cooordonnées; car soient α', β' et α'', β'' ces coordonnées; en les substituant dans l'équation $ay'^2 + b'y'^2 = a'^2b'^2$ de l'ellipse rapportée à ses diamètres (art. 357) (page 217), on aura

$$a'^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2 = a'^2\beta'^2, \quad a'^2\beta''^2 + b'^2\alpha''^2 = a'^2b''^2,$$

équations qui feront connaître les valeurs des demi-diamètres a', b'; demi-diamètres qui deviendront le demi-grand axe et le demi-petit axe, lorsque l'angle donné sera droit. Ce que nous disons de l'ellipse peut s'appliquer à l'hyperbole.

CHAPITRE XXXII.

Discussion des équations du second degré, appliquée à des exemples.

505. Lorsqu'on se propose de discuter une équation, c'est-à-dire d'analyser la courbe qu'elle peut faire naître, il faut, en général, commencer par examiner (art. 486) la nature de la quantité $B^2 - 4AC$.

506. Dans le cas où $B^2 - 4AC$ est négatif, si les expressions $B^2 - 4AC$, $BD - 2AE$, $D^2 - 4AF$ satisfont à l'équation (392), elle se réduit au point isolé (art. **492**). Si les conditions de l'art. **495** sont remplies, l'équation n'a aucune signification; enfin si l'équation $B^2 - 4AC =$ *nombre négatif* est seulement remplie, la courbe est une ellipse; cette ellipse se réduit au cercle, si l'on a $A = C$ et $B = 0$ (art. **496**).

507. Dans le cas où $B^2 - 4AC$ est positif, si les expressions $B^2 - 4AC$, $BD - 2AE$, $D^2 - 4AF$ satisfont à l'équation (392), la courbe se réduit au système de deux lignes droites qui ne sont pas parallèles (art. **492**); si toujours dans l'hypothèse de $B^2 - 4AC$ positif, l'équation (392) n'est pas satisfaite, la courbe est une hyperbole.

508. Dans le cas où $B^2 - 4AC = 0$, si $BD - 2AE$ n'est pas nul, la courbe est une parabole. Mais si l'on a $B^2 - 4AC = 0$, $BD - 2AE = 0$, il faut examiner ce que devient $D^2 - 4AF$, car ces deux expressions étant nulles, si $D^2 - 4AF =$ *nombre positif*, la courbe se réduit au système de deux droites parallèles (art. **491**); et si, outre les conditions de l'art. **487**, $D^2 - 4AF = 0$, elle se rapporte à la ligne droite (art. **488**). Enfin si les conditions de l'art. **495** sont remplies, l'équation (398) n'a aucune signification.

509. Pour premier exemple, proposons-nous de discuter l'équation

$$y^2 - 6xy + 9x^2 - y\sqrt{10} = 0,$$

la condition $B^2 - 4AC = 0$ étant remplie, je regarde (art. **508**) quelle est la valeur de $BD - 2AE$, et comme cette expression n'est pas nulle, je conclus que la courbe est une parabole.

Je mets l'équation proposée (*voyez* l'art. **472**) sous cette forme :

$$(y - 3x)^2 - y\sqrt{10} = 0;$$

substituant les valeurs de x et de y, données par les formules

511. Prenons encore pour exemple l'équation

$$3y^2 + 5xy - 2x^2 + y = 0.$$

La relation $B^2 - 4AC =$ *nombre positif* étant satisfaite, je n'ai besoin (art. 507) que d'examiner si l'équation (392) a lieu, et comme cette équation ne peut être satisfaite, l'équation est celle d'une hyperbole que je rapporterai à ses axes principaux par les procédés indiqués dans l'exemple précédent.

CHAPITRE XXXIII.

Formules générales pour construire l'ellipse ou l'hyperbole, au moyen de leurs équations.

512. La discussion des équations exige un examen et des opérations que j'ai voulu éviter, dès la première édition de cet ouvrage, à l'aide des formules que nous allons déterminer.

513. Si dans l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad . \quad . \quad (408)$$

on substitue $x' + \alpha$ à x et $y' + \beta$ à y, pour la rapporter au centre, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + 2A\beta & y' + B\beta & x' + A\beta^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + B\alpha & \quad + 2C\alpha & \quad + B\alpha\beta \\ \qquad\qquad\qquad\quad + D & \quad + E & \quad + C\alpha^2 \\ & & \quad + D\beta \\ & & \quad + E\alpha \\ & & \quad + F \end{array}\right\} = 0. \quad (409)$$

En disposant de α et de β, pour que les termes en x' et en y' disparaissent, on aura

$$2A\beta + B\alpha + D = 0, \quad B\beta + 2C\alpha + E = 0; \ldots \quad (410)$$

d'où l'on tirera

$$\alpha = \frac{2AE - DB}{B^2 - 4AC}, \quad \beta = \frac{2CD - EB}{B^2 - 4AC}. \quad . \quad . \quad . \quad (411)$$

Telles seront les ordonnées du centre.

Multipliant la seconde des équations (410) par α, la première par β, et les ajoutant, on a

$$2A\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2C\alpha^2 + E\alpha + D\beta = 0;$$

d'où l'on tire

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 = -\tfrac{1}{2}D\beta - \tfrac{1}{2}E\alpha.$$

Substituant cette valeur dans le dernier terme de l'équation (409), on le réduit à

$$\tfrac{1}{2}(D\beta + E\alpha) + F.$$

Mettant dans ce dernier terme les valeurs de α et de β, et réduisant, il devient

$$\frac{CD^2 - EBD + AE^2}{B^2 - 4AE} + F.$$

Par conséquent l'équation (409) se transforme en

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + \frac{CD^2 - EBD + AE^2}{B^2 - 4AC} + F = 0.$$

Pour simplifier, faisons

$$\frac{CD^2 - EBD + AE^2}{B^2 - 4AC} + F = L, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (412)$$

et supprimant les accents, nous aurons

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + L = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (413)$$

Les valeurs de α et de β devenant infinies lorsque $B^2 - 4AC = 0$, cette transformation n'est possible que dans le cas des courbes

à centre. Rapportons la courbe à ses axes principaux, au moyen des formules (284), nous trouverons

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{A}\sin^2 p \\ +\ \mathrm{B}\sin p\cos p \\ +\ \mathrm{C}\cos^2 p \end{array}\right| \begin{array}{r} x'^2 + 2\mathrm{A}\sin p\cos p \\ -\ \mathrm{B}\sin^2 p \\ +\ \mathrm{B}\cos^2 p \\ -2\mathrm{C}\sin p\cos p \end{array}\left| \begin{array}{r} x'y' + \mathrm{A}\cos^2 p \\ -\mathrm{B}\sin p\cos p \\ +\ \mathrm{C}\sin^2 p \end{array}\right\} y'^2 + \mathrm{L} = 0 \ldots (414)$$

Le coefficient de $x'y'$, égalé à zéro, donne l'équation de condition

$$2\mathrm{A}\sin p\cos p - \mathrm{B}\sin^2 p + \mathrm{B}\cos^2 p - 2\mathrm{C}\sin p\cos p = 0,$$

$$\text{ou}\quad 2\sin p\cos p\,(\mathrm{A}-\mathrm{C}) + \mathrm{B}(\cos^2 p - \sin^2 p) = 0 \ldots (415)$$

Or, d'après les équations (28) (page 17), on a

$$2\sin p\cos p = \sin 2p, \quad \cos^2 p - \sin^2 p = \cos 2p;$$

mettant ces valeurs dans l'équation (415), on obtiendra

$$\sin 2p\,(\mathrm{A}-\mathrm{C}) + \mathrm{B}\cos 2p = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\sin 2p}{\cos 2p} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}, \quad \text{ou}\quad \operatorname{tang} 2p = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}.$$

Or, d'après la première des équations (6), les équations (3), et la combinaison des équations (2) et (3), la trigonométrie nous donne

$$\text{séc} = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2}, \quad \cos = \frac{1}{\text{séc}}, \quad \sin = \frac{\operatorname{tang}}{\text{séc}}.$$

Par la substitution de la valeur de tang $2p$ dans ces formules, on trouvera facilement,

$$\text{séc}\,2p = \sqrt{1+\frac{\mathrm{B}^2}{(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2}} = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2+\mathrm{B}^2}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}},$$

$$\cos 2p = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2+\mathrm{B}^2}}, \quad \sin 2p = \frac{-\mathrm{B}}{\sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2+\mathrm{B}^2}}. \quad (416)$$

D'une autre part, la formule (31) (page 18), élevée au carré, et dans laquelle on fera $a = 2p$ et $r = 1$, nous donne

$$\sin^2 p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2p \quad (*), \ldots\ldots (417)$$

et si dans cette équation nous mettons la valeur de $\cos 2p$ tirée de la première des équations (416), nous obtiendrons

$$\sin^2 p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}} \ldots\ldots (418)$$

En éliminant $\sin^2 p$ entre cette équation et l'équation (1) (art. 18), qui, en changeant a en $\frac{1}{2}p$ et en remplaçant r par l'unité, nous donne

$$\cos^2 p = 1 - \sin^2 p,$$

on trouvera

$$\cos^2 p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}} \ldots\ldots (419)$$

Si, dans le coefficient de x'^2 de l'équation (414), on substitue la valeur de $\sin p \cos p = \frac{1}{2}\sin 2p$, tirée de la première des équations (415), et ensuite celles de $\sin^2 p$ et de $\cos^2 p$, données par les équations (418), (419), ce coefficient se réduit à

$$\tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}\frac{(A - C)^2 + B^2}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}},$$

ou à

$$\tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2}.$$

Par le même procédé on réduira le coefficient de y'^2 à

$$\tfrac{1}{2}(A + C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2}.$$

514. Enfin, si dans l'équation (414), dont le terme en x', y' a été réduit à zéro, on remplace les coefficients de x'^2 et de y'^2

(*) Il suffit de substituer dans l'équation $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ la valeur de $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ pour obtenir $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a$.

par les valeurs que nous venons de leur trouver, on aura

$$\left[\tfrac{1}{2}(A+C)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]x'^2$$
$$+\left[\tfrac{1}{2}(A+C)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]y'^2+L=0.$$

Telle sera l'équation de la courbe rapportée aux axes principaux.

515. Pour avoir les longueurs de ces axes, nous ferons successivement $y'=0$, $x'=0$, et appelant a' et b' ce que deviennent x' et y' dans cette circonstance, nous aurons

$$a'^2=\frac{-2L}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}, \quad \ldots\ldots (420)$$

$$b'^2=\frac{-2L}{A+C+\sqrt{(A-C^2)+B^2}}. \quad \ldots\ldots (421)$$

Ces expressions sont celles des carrés des demi-axes principaux.

516. Si l'on divise l'une par l'autre, on obtiendra

$$\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}.$$

Ce rapport devient égal à l'unité lorsque la partie radicale est nulle, c'est-à-dire lorsque

$$(A-C)^2+B^2=0.$$

Or, la somme des deux carrés ne peut être nulle, à moins que chacun de ces carrés ne le soit séparément; donc, dans le cas où le radical s'évanouit, il faut qu'on ait

$$B^2=0, \quad (A-C)^2=0.$$

Ces équations nécessitent celles-ci,

$$B=0, \quad A=C,$$

qui expriment les conditions pour que

$$\frac{a'^2}{b'^2} = 1 \quad \text{ou que} \quad a' = b'.$$

L'ellipse se réduit alors au cercle; résultat conforme à celui que nous avons présenté (art. 496) pour ce cas.

Si B seul était nul, la valeur de $\sin^2 p$ donnée par l'équation (418) se réduirait à zéro; donc l'axe des abscisses serait celui des ordonnées rectangulaires. C'est encore une vérité que nous avons reconnue d'une autre manière (art. 456).

517. Lorsque B n'est pas nul, l'expression $\frac{A - C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$ qui entre dans les équations (418) et (419) est moindre que l'unité; par conséquent, dans le cas où $A - C$ est positif, ces équations donnent

$$\sin^2 p < \tfrac{1}{2}, \quad \cos^2 p > \tfrac{1}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\sin p < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos p > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si dans un cercle SMB (*fig.* 179), décrit avec le rayon des tables, on prend l'arc MB $= \frac{1}{8}$ *circonférence*, l'angle MOB sera la moitié d'un angle droit; donc l'angle M vaudra l'autre moitié, et l'on aura Fig. 179.

$$2\,OP^2 \quad \text{ou} \quad 2\,PM^2 = OM^2 = 1,$$

d'où l'on tirera $\quad OP \quad \text{ou} \quad PM = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Cela posé, la valeur absolue de $\sin p$ devant être moindre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et celle du cosinus devant surpasser $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il faut que l'angle p soit moindre que l'angle MOB, qui a pour mesure

$\frac{1}{8}$ *circonférence,* ou surpasse l'angle SOB, qui a pour supplément l'angle SOQ = MOB.

On trouverait de même que dans le cas où A — C est négatif, on a $\sin p > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos p < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et que par conséquent l'angle p doit être plus grand que MOB = $\frac{1}{8}$ *circonférence,* sans cependant surpasser SOB, qui a pour supplément SOQ = $\frac{1}{8}$ *circonférence.*

518. Donnons une application de ce qui précède, en construisant la courbe qui a pour équation

$$2y^2 - 4xy + 5x^2 - 3x = 0.$$

Je vois d'abord que $B^2 - 4AC$ est une quantité négative, et que $BD - 2AE$ est une quantité positive; donc (art. **506**) l'équation n'est pas absurde, et ne se réduit ni à celle du point, ni à celle du cercle, puisque la condition

$$(BD - 2AE) = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF) \quad \text{(art. 490)},$$

et celles de l'art. **495** ne sont pas remplies.

Ainsi la condition $B^2 - 4AC$ = *nombre négatif,* qui est satisfaite, m'annonce que la courbe est une ellipse. Cette ellipse n'est pas rapportée à l'un de ses axes principaux, puisque le terme en xy existe (art. **468**).

Le terme $-3x$ m'indique (art. **462**) que l'origine des coordonnées n'est pas au centre de la courbe.

Il est facile de reconnaître que l'origine est sur la courbe même; car si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = 0$.

Pour déterminer les coordonnées du centre, nous comparerons les coefficients de l'équation proposée à ceux de l'équation générale des courbes du second ordre (408) (page 326), et nous verrons que

$$A = 2, \quad B = -4, \quad C = 5, \quad D = 0, \quad E = -3, \quad F = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (411), nous trou-

verons

$$\alpha = \frac{-12}{-24} = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \frac{-12}{-24} = \tfrac{1}{2}.$$

Une semblable substitution étant faite dans l'équation (412), nous donnera

$$L = \frac{18}{-24} = -\tfrac{3}{4}.$$

Au moyen de cette valeur de L, et de celles des coefficients A, C, B, mises dans les équations (420) et (421), on trouvera

$$a'^2 = \frac{3}{2(7-5)} = \tfrac{3}{4}, \quad b'^2 = \frac{3}{2(7+5)} = \tfrac{1}{8}.$$

Réduisant ces valeurs de a'^2 et de b'^2 à un dénominateur commun qui soit un carré, on aura

$$a'^2 = \frac{4 \times 3}{16}, \quad b'^2 = \tfrac{2}{16}.$$

Donc $\quad a' = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}, \quad = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad b' = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

De même l'équation (418) se réduit à

$$\sin^2 p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \times \frac{-3}{5} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{8}{10}.$$

Pour déterminer la valeur de cet angle p, au moyen des tables des logarithmes, on a

$$\log \sin p = \tfrac{1}{2}(\log 8 - \log 10) = \tfrac{1}{2}(0{,}903090 - 1) = -0{,}048455.$$

Ce logarithme est négatif, parce que le rayon est supposé égal à l'unité; mais si l'on prend le rayon des tables, qui est 10 milliards de fois plus grand, il faudra ajouter la caractéristique 10 à ce logarithme, et l'on aura 9,951545. Ce nombre

répond, dans les tables des sinus, à

63° 26′ *division sexagésimale,* ou à 70° 48′ *division décimale.*

Ayant donc pris pour abscisse une droite $\alpha = \frac{1}{2}$, et pour ordonnée une droite $\beta = \frac{1}{2}$, je déterminerai le centre par lequel je mènerai une droite qui, avec l'axe des abscisses, fasse un angle de 63° 26′, *division sexagésimale,* et prenant de chaque côté de cette droite, à compter du centre, une longueur de $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, je tracerai le grand axe, sur lequel je placerai le petit axe $2b' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Au moyen de ces axes la courbe sera déterminée et placée convenablement.

519. Observons que pour construire la courbe, il suffit de prendre des lignes qui soient entre elles dans le rapport des précédentes; ainsi, pour éviter les fractions, je multiplierai les valeurs de α et de β, de a' et de b' par 100, et j'aurai

$$\alpha = 50, \quad \beta = 50, \quad a' = 50\sqrt{3}, \quad b' = 25\sqrt{2}.$$

Prenant ces parties sur une échelle, il sera facile de déterminer la position des axes par rapport à celui des x.

520. Lorsque dans l'équation (413)

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + L = 0,$$

on fait $y = 0$, on trouve

$$x = \pm\sqrt{\frac{-L}{C}}.$$

Cette valeur de x est imaginaire lorsque L et C sont de mêmes signes. On conçoit bien comment une valeur imaginaire de y dans l'hyperbole peut correspondre à $x = 0$; mais quand l'équation se rapporte à l'ellipse que signifie cette valeur imaginaire que prend l'ordonnée au centre de la courbe?

Pour le savoir, il faut remarquer que dans ce cas $B^2 - 4AC$ étant une quantité négative, A et C doivent être de mêmes signes; et comme, dans l'hypothèse actuelle, L est du signe de C, il en résulte que A, C et L sont de mêmes signes; or, dans ce cas, l'équation proposée est absurde : en effet, les trois conditions qui doivent être remplies (art. 495) par l'équation (356) (page 288), pour que cette équation soit absurde, se trouvent ici satisfaites; car, en comparant l'équation (355) à l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + L = 0, \quad \text{on a} \quad D = 0, \quad F = L.$$

Donc $D^2 - 4AF$, qui se réduit à $-4AL$, et $B^2 - 4AC$ sont des *nombres négatifs*, puisque A et L sont de mêmes signes; d'une autre part, $BD - 2AE$ se réduit à zéro.

D'après ces valeurs de $B^2 - 4AC$, de $D^2 - 4AF$ et de $BD - 2AE$, il sera facile de reconnaître que les conditions prescrites dans l'art. 495, pour que l'équation proposée se trouve absurde, sont remplies.

521. Toutes les courbes du second ordre à centre, qui ne diffèrent que par le dernier terme, sont semblables.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que le rapport qui existe entre les carrés des deux demi-axes principaux, donné précédemment (art. 516), est indépendant de L.

CHAPITRE XXXIV.

Formules pour construire la parabole au moyen de son équation.

522. L'équation de condition de la parabole $B^2 = 4AC$ nous donne $B = \pm 2\sqrt{AC}$. Le signe qui conviendra sera celui

que B aura dans la proposée; c'est pourquoi nous allons considérer successivement les cas de B positif et de B négatif.

Représentons en général la proposée par

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Si nous remplaçons B par la valeur $2\sqrt{AC}$, qui convient au premier cas, nous aurons,

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Les valeurs

$$x = x'\cos p - y'\sin p, \quad y = x'\sin p + y'\cos p$$

(art. 284) étant substituées dans cette équation, nous trouverons, en opérant comme dans l'art. 472,

$$\begin{aligned}&(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})^2 x'^2\\ &+ 2(\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C})(\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C})x'y'\\ &+ (\cos p\sqrt{A} - \sin p\sqrt{C})^2 y'^2 + \left.\begin{matrix}D\cos p\\ -E\sin p\end{matrix}\right| y' + \left.\begin{matrix}D\sin p\\ +E\cos p\end{matrix}\right| x' + F = 0 \ldots (422)\end{aligned}$$

Si l'on fait $\sin p\sqrt{A} + \cos p\sqrt{C} = 0$, les termes en x'^2 et en $x'y'$ s'évanouissent, et l'on tire de cette équation

$$\frac{\sin p}{\cos p} \text{ ou } \operatorname{tang} p = -\sqrt{\frac{C}{A}}, \ldots\ldots (423)$$

A et C étant de mêmes signes en vertu de l'équation $B^2 = 4AC$; le second membre de l'équation (423) sera réel et négatif; donc $\sin p$ et $\cos p$ auront des signes contraires, ce qui nécessite l'un de ces deux cas :

Premier cas. Le sinus positif et le cosinus négatif;

Second cas. Le sinus négatif et le cosinus positif.

Dans le premier cas, la Trigonométrie nous apprend que l'angle doit être obtus, et que dans le second, l'angle p doit

surpasser trois angles droits; ne voulant pas considérer des angles plus grands que deux droits, attendu qu'un angle qui n'excède pas deux angles droits peut aussi bien déterminer la direction du nouvel axe qu'un angle au-dessus, nous adopterons donc le premier cas.

Et comme la sécante d'un angle qui appartient à un angle obtus est négative, nous aurons

$$\text{séc}\, p = -\sqrt{1 + \text{tang}^2 p} = -\sqrt{1 + \frac{C}{A}} = -\sqrt{\frac{A+C}{A}},$$

$$\cos p = \frac{1}{\text{séc}\, p} = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}},$$

et $$\sin p = \text{tang}\, p \times \cos p = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}}.$$

Substituant ces valeurs de $\sin p$ et de $\cos p$ dans l'équation (422), qui a perdu les termes en x'^2 et en $x'y'$, cette équation deviendra

$$\left[\frac{-(A+C)}{\sqrt{A+C}}\right]^2 y'^2 + \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}} x' - \frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})}{\sqrt{A+C}} y' + F = 0,$$

ou parce que le coefficient de y'^2 étant élevé au carré, donne

$$\frac{(A+C)^2}{A+C} = A + C,$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} &(A+C)\, y'^2 + \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}} x' \\ &- \frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})}{\sqrt{A+C}} y' + F = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (424)$$

Représentons cette équation par

$$My^2 + Nx + Py + F = 0,$$

et, pour diminuer le nombre de ses termes, supposons

$$y = y' + \beta, \quad x = x' + \alpha;$$

substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$\left.\begin{array}{r|l} My'^2 + 2M\beta & y' + Nx' + M\beta^2 = 0 \\ P & \qquad\qquad + N\alpha \\ & \qquad\qquad + P\beta \\ & \qquad\qquad + F \end{array}\right\} \ldots (425)$$

Faisant $2M\beta + P = 0$ et $M\beta^2 + N\alpha + P\beta + F = 0$, on tire de ces équations

$$\alpha = \frac{P^2}{4MN} - \frac{F}{N}, \quad \beta = -\frac{P}{2M},$$

et l'équation (425) se réduit à

$$My'^2 + Nx' = 0.$$

Substituant dans ces trois formules les valeurs de M, de N et de P, qui sont les coefficients de y'^2, de x' et de y' de l'équation (424), on trouve

$$\alpha = \frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})^2}{4(A+C)\sqrt{A+C}(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} - \frac{F\sqrt{A+C}}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}, \ldots (426)$$

$$\beta = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{A+C}}, \ldots\ldots (427)$$

$$(A+C)y'^2 + \frac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}{\sqrt{A+C}}x' = 0,$$

ou plutôt

$$y'^2 + \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{A+C}}x' = 0 \ldots (428)$$

Il faut joindre à ces formules l'équation (423).

523. Si, dans l'équation proposée, B était négatif, ces formules ne conviendraient pas; mais en faisant les calculs précédents, dans l'hypothèse de B négatif, on trouverait

$$\alpha = \frac{(D\sqrt{A} - E\sqrt{C})^2}{4(A+C)\sqrt{A+C}(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})} - \frac{F\sqrt{A+C}}{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}, \ldots (429)$$

$$\beta = \frac{E\sqrt{C} - D\sqrt{A}}{2(A+C)\sqrt{A+C}}, \ldots\ldots (430)$$

$$y'^2 + \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{A+C}}x' = 0, \ldots (431)$$

$$\text{tang}\, p = \sqrt{\frac{C}{A}} \ldots\ldots\ldots (432)$$

524. Prenons pour exemple l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - 3y = 0,$$

qui satisfait à la condition $B^2 = 4AC$, sans que $BD - 2AE$ soit nul, et par conséquent est celle d'une parabole. J'examine d'abord le signe du terme en xy, et comme il est négatif, cette parabole se construira par les formules (429), (430), (431), (432).

Ayant donc tracé les axes rectangulaires AX et AY (*fig.* 180), et pris le point A pour origine, je mènerai le nouvel axe AX′ en lui faisant former avec l'axe AX un angle p, dont la tangente sera exprimée par la formule (432), qui se réduira, dans notre cas, à $\sqrt{1} = 1$, et par conséquent sera celle de la moitié d'un angle droit: je calculerai ensuite, au moyen des formules (429), (430), (431), les coordonnées α et β du sommet et l'équation de la courbe rapportée à son axe principal, et je trouverai, Fig. 180.

$$\alpha = -\frac{3}{8\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{3}{4\sqrt{2}},$$

et

$$y'^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}x' = 0.$$

Le coefficient de x' me donnera $\frac{3}{4\sqrt{2}}$ pour la valeur du paramètre ; donc,

$$\alpha : \beta : \textit{paramètre} :: \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} :: 1 : 2 : 4.$$

L'abscisse négative α étant représentée par 1, je prendrai
Fig. 180. (*fig.* 180) AB d'une partie, et la perpendiculaire BD de deux ; alors D sera la nouvelle origine, et déterminera le sommet de la courbe. Menant donc par le point D une parallèle DG' à l'axe AX', cette droite DG sera le nouvel axe sur lequel je porterai, de D en F, une partie égale au quart du paramètre représenté par 4. Ayant ainsi déterminé le foyer F et le sommet D, il sera facile de construire la courbe.

Si le paramètre eût été négatif, j'aurais porté le quart du coefficient de x', de D en F', et la courbe aurait tourné son ouverture dans un sens opposé.

525. Dans l'hypothèse de B positif, le signe de la tangente donnée par l'équation (423) étant contraire à celui de B, et la même chose ayant lieu dans l'hypothèse de B négatif, ainsi qu'on peut s'en assurer en considérant le signe de l'équation (432), il suit de là que, lorsque B est positif, la tangente de l'angle p est négative, que la direction du nouvel axe forme un angle obtus (*) avec l'axe primitif, et que cet angle devient aigu lorsque B est négatif.

CHAPITRE XXXV.

De la quadrature des courbes du second ordre.

526. La quadrature des courbes a longtemps exercé la sagacité des anciens ; les modernes, sur les pas de Descartes, ont

(*) On doit se rappeler que nous sommes convenus de placer l'origine de l'angle à droite.

traité cette question avec de grands avantages sur eux ; mais il n'appartenait qu'à la géométrie de Newton et de Leibnitz de surmonter les difficultés inhérentes à ce sujet, ou du moins de réduire à des approximations tout ce que la nature des choses rend inaccessible aux efforts de l'esprit humain. Il me paraîtrait donc convenable, autant pour se mettre en rapport avec les progrès de la science, que pour épargner un temps précieux à l'étude, qu'on ne s'occupât des problèmes de ce genre que lorsqu'on serait en état de les traiter par l'analyse infinitésimale, qui en donne la solution par des procédés si simples et si généraux; néanmoins, pour obéir à l'usage, je consacrerai ce chapitre à la quadrature des courbes du second ordre, en commençant par l'ellipse, qui renferme le cercle comme cas particulier.

327. On a vu (art. **275**) que si le grand axe de cette courbe est pris pour diamètre d'un cercle, et qu'on nomme y' et y'' deux ordonnées appartenant à la même abscisse, l'une dans l'ellipse et l'autre dans le cercle, on a

$$y' = \frac{b}{a} y''.$$

Cette relation entre les coordonnées des deux courbes peut servir à faire trouver la surface de l'ellipse ; pour cet effet, partageons l'axe des abscisses en parties égales AP, PP′, P′P″, etc., et nommons n l'une de ces parties (*fig.* 181); par les points de division P, P′, P″, etc., élevons des perpendiculaires, et par les points où ces perpendiculaires rencontrent les deux courbes, menons des lignes droites qui formeront deux polygones inscrits, l'un à l'ellipse et l'autre au cercle. Fig. 181.

Soient $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$, etc., nous aurons, d'après l'article cité,

$$NP = \frac{b}{a} y, \quad N'P' = \frac{b}{a} y', \quad N''P'' = \frac{b}{a} y'', \text{ etc.}$$

Et comme, par hypothèse, $AP = PP' = P'P''$ etc. $= n$, on trouvera facilement que le trapèze PP'NN' a pour expression

$$\tfrac{1}{2}(PN + P'N')\,PP' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}y + \frac{b}{a}y'\right)n = \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}(y + y')n;$$

et comme, d'une autre part, le trapèze PP'MM' a pour expression

$$\tfrac{1}{2}(PM + P'M')\,PP' = \tfrac{1}{2}(y + y')\,n,$$

le rapport des deux surfaces sera donc exprimé par $\frac{b}{a}$.

On prouverait de même que tout autre trapèze inscrit dans l'ellipse est à son trapèze correspondant inscrit dans le cercle, dans le même rapport, qui sera aussi celui des triangles APN et APM (*).

Donc, puisque dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents est à celle des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, on aura : la somme des trapèzes inscrits dans l'ellipse, et des triangles APN et BP'''N''', est à celle des trapèzes inscrits dans le cercle, et des triangles APM et BP'''M''', dans le rapport de b à a : cette propriété, étant indépendante du nombre des côtés de ces polygones, appartiendra aussi à l'ellipse et au cercle qui sont les limites des surfaces de ces polygones; donc

$$\textit{aire de l'ellipse} = \frac{b}{a}\ \textit{aire du cercle}. \quad . \quad . \quad . \quad (433)$$

(*) Nous avons, en effet,

$$\textit{aire du triangle } AMP = \tfrac{1}{2}ny,$$

$$\textit{aire du triangle } ANP = \tfrac{1}{2}n\frac{b}{a}y;$$

donc, en supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}n$, on trouve

$$\frac{\textit{aire du triangle } ANP}{\textit{aire du triangle } AMP} = \frac{b}{a}.$$

528. $1 : \pi$ étant le rapport du diamètre à la circonférence, l'aire du cercle qui a a pour rayon a pour expression πa^2; substituant cette valeur dans l'équation (502) et réduisant, on aura

$$\textit{aire de l'ellipse} = \pi ab. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (434)$$

Si l'on demande l'aire d'une ellipse AA′ BB′ (*fig.* 182), dont les demi-diamètres conjugués A′O, B′O sont donnés, ainsi que l'angle A′OB′ $= \varphi$, formé par ces demi-diamètres, comme on a (art. 366)

$$ab = a'b' \sin \varphi,$$

substituant cette valeur dans l'équation (434), on trouvera

$$\textit{aire de l'ellipse} = \pi a'b' \sin \varphi.$$

529. On peut se proposer aussi de trouver l'aire d'un segment elliptique ANP ou PNN′P′ (*fig.* 181). Si nous considérons ces segments comme composés d'une somme de trapèzes qui sont tous dans le rapport de b à a, on prouverait, comme on l'a fait pour l'ellipse, qu'en passant à la limite, on a Fig. 181.

$$\textit{aire } \text{ANP} = \frac{b}{a} (\textit{aire } \text{du } \textit{segment de cercle } \text{AMP}),$$

$$\textit{aire } \text{PNN'P'} = \frac{b}{a} (\textit{aire } \text{du } \textit{segment de cercle } \text{PMM'P'}).$$

530. Le même procédé que l'on a employé pour trouver l'aire de l'ellipse étant appliqué à l'hyperbole, si l'on représente par A l'aire de l'hyperbole équilatère, dont l'équation (art. 301) est

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

il sera facile de prouver, comme dans l'art. 527, que chaque trapèze de l'hyperbole sera à chaque trapèze correspondant de l'hyperbole équilatère, dans le rapport de b à a, et de conclure, comme dans cet article, que le segment d'hyperbole a pour surface l'aire du segment correspondant de l'hyperbole

équilatère multipliée par le rapport $\frac{b}{a}$; de sorte que si l'on désigne par A et par B les aires de ces segments dans l'hyperbole et dans l'hyperbole équilatère, on doit avoir

$$A = \frac{b}{a} B \sin \varphi.$$

531. La question de la quadrature de l'hyperbole étant ainsi ramenée à celle de l'hyperbole équilatère, occupons-nous de la quadrature de cette courbe; et comme elle s'étend à l'infini, cherchons à déterminer la portion d'hyperbole équilatère com-
Fig. 183. prise entre les coordonnées PM et RS (*fig.* 183).

La question se réduit à trouver l'espace asymptotique MPSR; car, si on le connaissait, il suffirait de le retrancher du rectangle PMLR = PR × PM pour avoir la portion d'hyperbole équilatère demandée.

Cela posé, l'équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes rectangulaires étant $xy = m^2$, équat. (225)(p. 203), supposons d'abord $m^2 = 1$, et l'équation de notre hyperbole sera

$$xy = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (435)$$

Prenons également l'abscisse AP pour unité; l'équation (435), en y faisant $x = 1$, nous donnera $y = 1$. Considérons ensuite une abscisse quelconque que nous représenterons par AR, et sur la partie PR de cette abscisse, qui sert de base à l'espace asymptotique que nous voulons mesurer, construisons dans la longueur de PR les rectangles

PMNP′, P′M′N′P″, P″M″N″P‴, P‴M‴N‴P^{iv}, etc.;

si nous nommons a, a', a'', a''', etc.,

les abscisses AP, AP′, AP″, AP‴, etc.;

et b, b', b'', b''', etc.,

les ordonnées PM, P′M′, P″M″, P‴M‴, etc.,

et puisque $AP = 1$, en faisant $x = 1$ l'équation (435) nous donnera

$$b = 1,$$

les rectangles

$$PMNP', P'M'N'P'', P''M''N''P''', P'''M'''N'''P^{iv}, \text{ etc.}$$

auront respectivement pour bases

$$AP' - AP, \quad AP'' - AP', \quad AP''' - AP'',$$

ou $$a' - 1, \quad a'' - a', \quad a''' - a'', \text{ etc.},$$

et pour hauteurs $1, b', b'', \text{ etc.};$

de sorte que nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \text{rect. } P\,M\,N\,P' = (a' - 1)\,(*), \\ \text{rect. } P'\,M'\,N'\,P'' = (a'' - a')\,b', \\ \text{rect. } P''\,M''\,N''\,P''' = (a''' - a'')\,b'', \\ \text{ainsi de suite.} \end{array}\right\} \quad \ldots (436)$$

Or, $1, a', a'', a'''$, etc., étant les abscisses des points M, M', M'', M''', etc., de la courbe, dont les ordonnées sont $1, b', b'', b'''$, ces coordonnées satisferont à l'équation $xy = 1$, d'où l'on tire

$$y = \frac{1}{x};$$

cette équation nous donnera donc

$$b' = \frac{1}{a'}, \quad b'' = \frac{1}{a''}, \quad b''' = \frac{1}{a'''}, \text{ etc.};$$

(*) Observons que la hauteur du rectangle PMNP' est l'unité, parce que la valeur $x = 1$ de l'abscisse AP, étant mise dans l'équation (435), nous donne $y = 1$; ce qui est cause que le rectangle est désigné seulement par $a' - 1$. Il suit encore de la valeur $y = 1$, que le rectangle APMQ est un carré.

substituant ces valeurs dans les équations (436), ces équations deviendront

$$\text{rect. P M N P}' = (a' - 1),$$

$$\text{rect. P}'\text{M}'\text{N}'\text{P}'' = (a'' - a')\frac{1}{a'},$$

$$\text{rect. P}''\text{M}''\text{N}''\text{P}''' = (a''' - a'')\frac{1}{a''},$$

ainsi de suite;

et en effectuant les divisions par a', a'', a''', etc., on aura

$$\left.\begin{array}{l} \text{rect. P M N P}' = a' - 1 \\ \text{rect. P}'\text{M}'\text{N}'\text{P}'' = \dfrac{a''}{a'} - 1, \\ \text{rect. P}''\text{M}''\text{N}''\text{P}''' = \dfrac{a'''}{a''} - 1; \\ \text{ainsi de suite.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (437)$$

Les abscisses, à l'exception de la première, n'ayant été déterminées par aucune condition, sont arbitraires. Par conséquent on peut prendre a, a', a'', a''', etc., en progression géométrique; et comme le premier terme a est l'unité, la raison sera égale au second terme, et tous les autres deviendront les puissances successives de ce second terme a' (*), c'est-à-dire qu'on aura

$$a = (a')^2, \quad a''' = (a')^3, \ldots, \quad a'^{(n-1)} = a^n;$$

remplaçant ces valeurs dans la suite d'abscisses

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\text{IV}}, \ldots,\ (a')^n,$$

(*) Pour s'en convaincre, soit une suite de termes a, b, c, d, etc., en progression géométrique, et r la raison. Par la nature de ces sortes de progressions, on a $b = ar$, $c = br$, $d = br$, etc.; donc puisque, dans notre hypothèse, le premier terme est 1, la première de ces équations se réduit à $b = r$: au moyen de cette valeur, et par des substitutions successives, on obtient $c = r^2$, $d = r^3$, etc.

et en observant que $a = 1$, cette série se change en

$$1,\ a',\ (a')^2,\ (a')^3,\ (a')^4, \ldots,\ (a')^n,$$

et les équations (437) deviendront

$$\text{rect. P M N P}' = a' - 1 = a' - 1,$$

$$\text{rect. P}'\text{M}'\text{N}'\text{P}'' = \frac{(a')^2}{a'} - 1 = a' - 1,$$

$$\text{rect. P}''\text{M}''\text{N}''\text{P}''' = \frac{(a')^3}{(a')^2} - 1 = a' - 1,$$

$$\text{etc.,} \qquad \text{etc.}$$

On voit donc que tous les rectangles compris dans l'étendue de PR deviennent égaux.

Ajoutons maintenant au premier rectangle le second, et ensuite le troisième, le quatrième, etc., nous aurons successivement des sommes croissantes de rectangles égaux qui, y compris le premier, correspondront aux abscisses

$$\text{AP}',\ \text{AP}'',\ \text{AP}''', \ldots,\ \text{AR} \quad \text{ou} \quad \text{AP}^n.$$

A l'égard de AP, comme les rectangles ne commencent qu'en P', cette abscisse AP, qui est égale à l'unité, ne correspond à aucun rectangle, c'est-à-dire qu'on peut admettre que $x = 1$ correspond à l'aire zéro. D'une autre part, on verra qu'aux abscisses suivantes

$$\text{AP}',\ \text{AP}'',\ \text{AP}''',\ \text{AP}^{\text{IV}},\ \ldots,\ \text{AR},$$

ou

$$a',\ a'',\ a''',\ a^{\text{IV}},\ \ldots,\ \text{AR},$$

répondent les aires

$$a' - 1,\ 2(a' - 1),\ 3(a' - 1),\ 4(a' - 1), \ldots, n(n - 1);$$

d'où l'on peut conclure que les abscisses

$$1,\ a',\ a'^2,\ a'^3,\ \ldots,\ a'^n$$

étant en progression géométrique, leurs aires correspondantes indiquées par

$$0\ (a'-1);\ 2(a'-1),\ 3(a'-1),\ldots,\ n(a'-1),$$

sont en progression arithmétique; d'où il suit que les airessont les logarithmes des abscisses correspondantes.

Maintenant il est évident que plus il y aura de rectangles dans l'étendue de P'R, et plus les ordonnées PM, P'M', P''M'', etc. se rapprocheront, et moins l'espace qu'elles comprennent sera grand, et plus la somme des rectangles compris depuis P jusqu'à R se rapprochera de l'aire asymptotique; de telle sorte que l'espace PP' diminuant continuellement, P' se confondra avec P dans le cas de la limite où le nombre n de rectangles est infini; alors la somme totale des rectangles ne différera plus de l'espace asymptotique PMSR, qui sera le logarithme de l'abscisse AR.

532. Il s'agit maintenant de savoir quelle sera la base de ce système de logarithmes.

Pour cela, remontons au terme général $n(a'-1)$, que nous avons vu être le logarithme de l'abscisse AR représentée par $(a')^n$; et en désignant cette abscisse par α, nous aurons donc

$$a'^{(n)} = \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (438)$$

et par conséquent,

$$a' = \sqrt[n]{\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (439)$$

D'un autre côté, puisque $n(a'-1)$ est le logarithme de α, si nous appelons B la base du système, nous aurons

$$\alpha = B^{n(a'-1)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (440)$$

substituant la valeur de a' tirée de l'équation (439), on aura

$$\alpha = B^{n(\sqrt[n]{\alpha}-1)} \ldots\ldots\ldots \quad (441)$$

Si nous voulons que la base B, qui est arbitraire tant qu'on n'a pas adopté un système de logarithmes, soit égale à α, il faudra qu'on ait $\alpha = B$; et l'équation (441) se convertira en

$$\alpha = \alpha^{n(\sqrt[n]{\alpha}-1)},$$

et en prenant les logarithmes, on obtiendra

$$\log \alpha = \log \alpha^{n(\sqrt[n]{\alpha}-1)};$$

et, d'après la propriété des logarithmes, cette équation peut prendre cette forme

$$\log \alpha = n(\sqrt[n]{\alpha}-1)\log \alpha;$$

supprimant le facteur commun, il restera

$$n\left(\sqrt[n]{\alpha} - 1\right) = 1;$$

on tire de là

$$\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \frac{1}{n},$$

et en élevant à puissance n,

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

développant le second membre par la formule de binôme, il viendra

$$\alpha = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n}{1}\frac{(n-2)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{1}{n^3}$$
$$+ \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{(n-4)}{4}\frac{1}{n^4}, \text{ etc.};$$

et en représentant par N le troisième terme, par N' le qua-

trième, etc., cette suite deviendra

$$a = 2 + N + N\frac{(n-2)}{3}\frac{1}{n} + N'\frac{(n-3)}{4}\frac{1}{n}, \text{ etc.};$$

restituant les valeurs de N, N′, N″, etc., et exécutant les opérations indiquées, on obtiendra

$$a = 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right), \text{ etc.}$$

En vertu de notre hypothèse, faisant $n = \infty$, les termes divisés par n seront tous nuls, et l'équation précédente se réduira à

$$a = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \text{etc.}$$

Bornons-nous à prendre les douze premiers termes de cette suite, nous trouverons

$$a = 2,7182818, \text{ etc.}$$

Nous reconnaissons dans cette valeur celle de la base e du système népérien, qu'on est convenu de désigner par e.

533. La quadrature de l'hyperbole équilatère dont l'équation est

$$xy = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (442)$$

nous conduit à celle de l'hyperbole équilatère plus générale qui appartient à l'équation

$$xy = m^2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (443)$$

car, en construisant ces deux hyperboles, on voit que pour la même abscisse nous avons les ordonnées

$$PN = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad PM = \frac{m^2}{x},$$

et que par conséquent chaque ordonnée de la seconde hyperbole est égale à l'ordonnée de la première multipliée par la même quantité constante m^2. Ainsi, par la même démonstration que nous avons employée (art. 527), nous conclurons que le segment hyperbolique, qui appartient à l'équation $xy = m^2$, est égal au segment hyperbolique qui appartient à l'équation $xy = 1$ multiplié par la constante m^2.

554. Déterminons maintenant la quadrature d'une portion de parabole, courbe qui, s'étendant à l'infini comme l'hyperbole, ne peut être entièrement carrable : pour cela, des points m, m', m'', m''' (*fig.* 184) pris sur la courbe, abaissons les perpendiculaires mp, $m'p'$, $m''p''$, $m'''p'''$, etc., sur l'axe rectangulaire des x, et les perpendiculaires mq, $m'q'$, $m''q''$, $m'''q'''$, etc., sur l'axe rectangulaire des y; nommant Fig. 184.

$$\mathrm{A}p,\ \mathrm{A}p',\ \mathrm{A}p'',\ \mathrm{A}p''',\ \text{etc.};\quad x,\ x',\ x'',\ x''';$$

et $$\mathrm{A}q,\ \mathrm{A}q',\ \mathrm{A}q'',\ \mathrm{A}q''',\ \text{etc.};\quad y,\ y',\ y'',\ y''',\ \text{etc.},$$

les angles droits $p'm'n$, $q'm'r$, qui sont opposés au sommet en m', formeront le rectangle intérieur $m'p$ et le rectangle extérieur $m'q$; représentant le premier par D et le second par E, ces rectangles auront pour expressions

$$\mathrm{D} = pn \times pp',\quad \mathrm{E} = mn \times q'm',$$

ou, en mettant les valeurs analytiques de ces lignes,

$$\mathrm{D} = (x - x')y',\quad \mathrm{E} = (y - y')x',$$

et par conséquent on trouvera pour leur rapport

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}} = \frac{(x - x')y'}{(y - y')x'}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (444)$$

l'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, on en tire

$$x = \frac{y^2}{2p},\qquad x' = \frac{y'^2}{2p},$$

substituant ces valeurs de x et de x' dans l'équation (444), on obtient

$$\frac{D}{E}=\frac{(y^2-y'^2)y'}{(y-y')y'^2}=\frac{(y'+y')(y-y')y'}{(y-y')y'^2};$$

supprimant les facteurs communs, cette équation se réduit à

$$\frac{D}{E}=\frac{y+y'}{y'},$$

ou plutôt à

$$\frac{D}{E}=1+\frac{y}{y'}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (445)$$

On prouverait de la même manière qu'en désignant par D′ et par E′ les rectangles $m''p'$ et $m''q'$, l'un intérieur à la parabole et l'autre extérieur, on a encore

$$\frac{D'}{E'}=1+\frac{y'}{y''}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (446)$$

et qu'en désignant de même par D″ et par E″ les rectangles $m'''p''$ et $m'''q''$, on a également

$$\frac{D''}{E''}=1+\frac{y''}{y'''}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (447)$$

ainsi de suite.

Or les ordonnées y, y', y'', y''', qui sont représentées sur la figure par Aq, Aq', Aq'', Aq''', etc., étant arbitraires, puisque les points m, m', m'' sont placés jusqu'à présent au hasard sur la courbe, nous pouvons prendre Aq, Aq', Aq'', etc., en progression géométrique, mais de telle manière cependant que Aq, quoique différant peu de Aq', soit plus grand que Aq', de même que Aq', peu différent de Aq'', le surpasse, etc.; ce qui exige que la raison de cette progression excède l'unité.

Ainsi, en désignant par m une quantité très-petite, nous pouvons représenter par $1+m$ la raison de cette progression

géométrique

$$:: y : y' : y'' : y''', \text{ etc.};$$ Fig. 184.

et comme, en divisant un antécédent par son conséquent, on a

$$\frac{y}{y'} = 1 + m, \quad \frac{y'}{y''} = 1 + m, \quad \frac{y''}{y'''} = 1 + m, \text{ etc.},$$

substituant ces valeurs dans les équations (445), (446), (447), etc., nous aurons

$$\frac{D}{E} = 2 + m,$$

$$\frac{D'}{E'} = 2 + m,$$

$$\frac{D''}{E''} = 2 + m, \text{ etc.};$$

et comme dans une suite de rapports égaux la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, il s'ensuit qu'on a

$$\frac{D + D' + D'' + D''' + \ldots}{E + E' + E'' + E''' + \ldots} = 2 + m.$$

Or plus m sera petit, moins deux ordonnées consécutives différeront l'une de l'autre, et par conséquent plus elles seront rapprochées; de sorte que si l'on passe à la limite en faisant $m = 0$, la somme des rectangles intérieurs $D + D' + D'' + D''' + \ldots$, se réduit à l'aire parabolique AmP, et la somme des rectangles extérieurs devient l'espace $Aqmm'm''A$; et, en représentant par S et par S′ ces deux surfaces, on a

$$\frac{S}{S'} = 2,$$

d'où l'on tire $$S = 2S';$$

et comme l'on a $$S + S' = Ap \times pm,$$

ou $$S + S' = xy,$$

en remplaçant S′ par sa valeur $\frac{S}{2}$, on obtient

$$S + \frac{S}{2} = xy,$$

ou $$\frac{3S}{2} = xy,$$

et $$S = \frac{2}{3}xy.$$

Ce qui nous apprend que l'aire du segment parabolique A*mp* est les deux tiers du rectangle construit sur les coordonnées x et y (*). (*Note vingt-deuxième.*)

(*) Il est à observer que quand le nombre n de rectangles est infini, ces rectangles deviennent chacun infiniment petits, de sorte que l'une de ces choses détruit l'effet de l'autre, et qu'une quantité qui se réduit à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont zéro, peut exprimer une quantité finie, par la raison que zéro peut être considéré comme un facteur commun. Au reste, il est démontré, avec la plus grande évidence, dans mes *Éléments de Calcul différentiel*, que toute expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ peut renfermer une quantité finie.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE
DES SURFACES
DU SECOND ORDRE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
A TROIS DIMENSIONS.

—

CHAPITRE PREMIER.

De la manière dont on peut déterminer la position d'une droite dans l'espace.

535. Lorsque les lignes ne sont pas assujetties à être dans un même plan, on ne peut déterminer leurs points successifs que par des procédés plus généraux que ceux que nous avons employés.

Pour cet effet, concevons trois axes AX, AY, AZ (*fig.* 185), formant entre eux des angles arbitraires, que pour plus de simplicité nous supposons droits; si l'on prend sur l'axe AX une droite AP $= x$, et qu'on mène par le point P une parallèle PQ $= y$ à l'axe AY, et par le point Q une parallèle QM $= z$ à l'axe AZ, la position du point M sera déterminée lorsqu'on aura assigné des valeurs connues à x, à y et à z. Ces lignes x, y, z sont les coordonnées du point M. Fig. 185.

Si l'on donne à x, à y et à z les valeurs particulières a, b, c, les équations du point dans l'espace seront

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

536. L'ordre dans lequel on prend ces coordonnées est arbitraire : par exemple, en menant toujours ces coordonnées parallèlement aux axes, on pourrait faire (*fig.* 186 et 187)
Fig. 186 et 187.

$$AP' = z, \quad P'Q' = y, \quad Q'M = x,$$

ou

$$AP' = y, \quad P'Q' = z, \quad Q'M = x,$$

et l'on déterminerait également le point M. C'est une suite de ce que les parallèles comprises entre des parallèles, sont égales.

—

CHAPITRE II.

Des plans coordonnés.

537. Faisons passer trois plans, le premier par les axes des x et des y, le second par les axes des x et des z, le troisième par les axes des y et des z; ces plans seront les plans coordonnés. Pour les distinguer entre eux, on nomme le premier le plan des x, y, le second le plan des x, z, et le troisième le plan des y, z.

538. Ces plans divisent l'espace en huit parties, dont quatre sont situées au-dessus du plan des x, y, et quatre au-dessous.

Un point sera situé au-dessus ou au-dessous du plan des x, y, selon que la coordonnée z sera positive ou négative ; les signes de x et de y détermineront ensuite quelle est celle des quatre régions supérieures ou inférieures à laquelle le point appartient.

Fig. 188. Soient pris, par exemple (*fig.* 188), quatre points M, M′, M″, M‴, situés chacun dans l'une des quatre régions supérieures, et ayant les mêmes valeurs absolues des coordon-

nées x, y, z; nous aurons

pour le point M, $AP = +x$, $PQ = +y$, $QM = +z$;

pour le point M′, $AP' = -x$, $P'Q' = +y$, $Q'M' = +z$;

pour le point M″, $AP = +x$, $P'Q'' = -y$, $Q''M'' = +z$;

pour le point M‴, $AP' = -x$, $P'Q''' = -y$, $Q'''M''' = +z$.

CHAPITRE III.

Des projections d'une droite située dans l'espace, et de ses plans projetants.

539. Si de tous les points d'une droite MM‴ (*fig.* 189) située dans l'espace, on abaisse des perpendiculaires MQ, M′Q′, M″Q″, M‴Q‴, etc., sur l'un des plans coordonnés que nous supposerons être le plan des x, y, toutes ces perpendiculaires seront dans un même plan. La chose est évidente si l'on ne considère que deux de ces perpendiculaires; mais s'il y en a trois, MQ, M′Q′, M″Q″, il faut prouver que le plan des droites MQ, M′Q′ est le même que celui des droites M′Q′, M″Q″; c'est ce qui est facile, car la droite M′M″, qui est le prolongement de MM′, est à la fois dans le plan MQ′ et dans le plan M′Q″; la perpendiculaire M′Q′ est aussi dans ces deux plans, parce que cette droite en est la commune section. Or, deux plans qui ont deux droites communes doivent se confondre. On prouverait de même que toutes les autres perpendiculaires sont dans le même plan. Fig. 189.

540. Le plan MQ‴ qui contient toutes ces perpendiculaires porte le nom de *plan projetant*, et sa commune section QQ‴ avec le plan des x, y est la projection de la droite sur ce plan.

Cette projection QQ‴ peut être considérée encore comme la

droite qui serait formée par les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de la droite MM''' sur le plan des x, y.

541. Ce que nous disons du plan des x, y pouvant s'appliquer aux plans des y, z et des x, z, on pourra déterminer les projections de la droite MM''' sur ces plans, en abaissant des perpendiculaires de tous les points de cette droite sur chacun des plans des y, z et des x, z.

542. Les perpendiculaires MQ, M'Q', M''Q'', etc., étant terminées à leurs extrémités par la droite MM''' et par sa projection QQ''', il suit de là que ces droites MM''' et QQ''' sont situées dans le plan QM''', qui (art. 539) est commun à toutes ces perpendiculaires.

Le plan projetant a donc la propriété de contenir la droite donnée dans l'espace et sa projection. Cette projection pouvant être sur l'un quelconque des plans coordonnés, il y aura donc trois plans projetants, respectivement perpendiculaires à chacun des plans coordonnés.

543. Puisque la droite donnée doit se trouver dans un quelconque des plans projetants, il est évident qu'elle sera la commune section des trois plans projetants. Or, cette commune section étant également déterminée par la rencontre de deux des plans projetants, il en résulte que, pour fixer la po-
Fig. 190 sition de la droite KL (*fig.* 190) dans l'espace, il suffit de donner deux des trois plans projetants.

CHAPITRE IV.

Des équations d'une droite située dans l'espace.

Fig. 190. 544. Prenons arbitrairement (*fig.* 190) sur une droite KL située dans l'espace, un point M dont nous représenterons les

coordonnées par x, y, z; abaissons de ce point M une perpendiculaire MQ sur le plan des z, x, le pied Q de cette perpendiculaire sera un point de la projection de la droite KL sur le plan des x, z. Or, le point Q est déterminé sur le plan des z, x par les coordonnées AP et PQ, qui sont précisément les coordonnées z et x du point M; donc ces coordonnées z et x du point M ont la propriété d'appartenir aussi au point Q de la projection de la droite KL sur le plan des z, x. Ce que nous disons du point M pouvant s'appliquer à tout autre point de la droite KL, il suit de là que les coordonnées z et x sont liées entre elles par l'équation de la projection de la droite KL sur le plan des z, x. Cette projection étant une ligne droite située dans le plan des z, x, si nous représentons son équation par $z = ax + \alpha$, les coordonnées z et x d'un point quelconque de la ligne droite satisferont donc toujours à cette équation, ou, ce qui est la même chose, l'une des coordonnées étant donnée, cette équation déterminera la valeur de l'autre.

On prouverait de même, en abaissant une perpendiculaire MQ′ sur le plan des z, y, que les coordonnées AP $= z$, PQ′ $= y$ d'un point M de la droite KL sont liées entre elles par l'équation $z = by + \beta$, qui est celle de la projection de la droite KL sur le plan des z, y.

Enfin, en abaissant du point M une perpendiculaire MQ″ sur le plan des z, y, il serait facile de s'assurer, par le même procédé, que les coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite KL sont liées entre elles par l'équation de la projection de cette droite sur le plan des x, y.

545. Deux de ces trois équations suffisent pour déterminer la troisième. En effet, les coordonnées x, y, z appartenant à un même point de la droite KL, si l'on élimine z entre les équations $z = ax + \alpha$, $z = by + \beta$, on trouvera

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{\alpha - \beta}{b}.$$

Cette équation, qui est du premier degré, exprime la relation qui existe entre les coordonnées x et y, et par conséquent doit être celle de la projection de la droite sur le plan des x, y (*).

546. Il résulte de ce qui précède, que lorsqu'on donne deux des équations des projections, la position de la droite

---

(*) Si l'on en avait encore quelque doute, représentons par $y = Ax + B$ l'équation de la projection sur le plan des x, y ; il est facile de prouver que cette équation est identique avec l'équation

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{\alpha - \beta}{b}.$$

Pour le prouver, soient x', y', z', et x'', y'', z'', les coordonnées de deux points de la ligne droite; ces coordonnées devant satisfaire à la fois à ces deux équations, nous avons

$$y' = Ax' + B,\quad y' = \frac{a}{b}x' + \frac{\alpha - \beta}{b},\quad y'' = Ax'' + B,\quad y'' = \frac{a}{b}x'' + \frac{\alpha - \beta}{b}.$$

On tire, par l'élimination de y' et de y'',

$$\left(A - \frac{a}{b}\right)x' + B - \frac{\alpha - \beta}{b} = 0,\quad \left(A - \frac{a}{b}\right)x'' + B - \frac{\alpha - \beta}{b} = 0 \ldots (448)$$

Retranchant les équations (448) l'une de l'autre, on a

$$\left(A - \frac{a}{b}\right)(x' - x'') = 0.$$

Les coordonnées x' et x'' étant par hypothèse inégales, cette équation ne peut être satisfaite que lorsque le premier facteur est égal à zéro, ce qui donne

$$A = \frac{a}{b}.$$

Cette valeur réduit l'une des équations (448) à

$$B - \frac{(\alpha - \beta)}{b} = 0,$$

d'où l'on tire $$B = \frac{\alpha - \beta}{b}.$$

doit être fixée dans l'espace. En effet, si sur les plans coordonnés qui renferment ces projections, on mène deux plans perpendiculaires, ces plans seront les plans projetants. Or, nous avons vu (art. 543) que par leur intersection ils déterminent la position de la droite dans l'espace.

Les équations des projections d'une droite dans l'espace sont appelées ses *équations*.

CHAPITRE V.

Solution de divers problèmes relatifs à la ligne droite dans l'espace.

PROBLÈME Ier.

547. *Une droite ayant pour équations*

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

trouver les coordonnées du point où elle rencontre l'un des plans coordonnés.

Si ce plan est celui des x, y, on fera $z = 0$, et l'on obtiendra $x = \alpha$, $y = \beta$ pour les coordonnées de ce point.

Ce même procédé s'appliquerait aux autres plans; mais on doit observer qu'il faut alors avoir l'équation de la troisième projection. Pour l'obtenir on éliminera z entre les équations données de la droite, et l'on trouvera

$$y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha).$$

Si l'on fait donc $y = 0$, les deux équations qui contiennent cette variable donneront

$$z = -\frac{\beta}{a}, \quad x = \alpha - \frac{a\beta}{b}$$

pour les coordonnées du point où le plan des z, x est percé par la droite. Enfin, en faisant $x = 0$, on trouvera de même

$$z = -\frac{\alpha}{a}, \quad y = \beta - \frac{b\alpha}{a}$$

pour les coordonnées du point où la droite perce le plan des z, y.

Problème II.

548. *Trouver les équations d'une ligne assujettie à passer par un point.*

Soient x', y', z' les coordonnées de ce point. Les équations de la droite donnée étant

$$x = az + \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (449)$$

$$y = bz + \beta; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (450)$$

puisque les coordonnées x', y', z' satisfont à ces équations, on aura

$$x' = az' + \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (451)$$

$$y' = bz' + \beta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (452)$$

Mettant dans l'équation (449) la valeur de α tirée de l'équation (451), et dans l'équation (450) la valeur de β tirée de l'équation (452), ce qui revient à éliminer α et β entre ces équations, on obtiendra

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'). \quad \ldots \quad (453)$$

Problème III.

549. *Trouver les équations de la droite assujettie à passer par deux points.*

Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées de ces points; assujettissant la droite à passer par le point x', y', z', on trouvera les équations (453); ces équations devant être satis-

faites par les coordonnées x'', y'', z'', en mettant ces coordonnées à la place de x, de y et de z, ces équations (453) deviendront

$$x'' - x' = a(z'' - z'), \quad y'' - y' = b(z'' - z');$$

d'où l'on tirera

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}, \quad b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (453), on aura, pour les équations de la ligne assujettie à passer par deux points,

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z') \ldots (454)$$

Problème IV.

550. *Trouver la condition nécessaire pour que deux droites données dans l'espace se rencontrent.*

Soient les équations de ces droites

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta, \ldots (455)$$

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta' \ldots (456)$$

Les coordonnées doivent être les mêmes au point de rencontre. Éliminant donc les trois variables x, y, z entre ces quatre équations, on trouvera d'abord, en retranchant les équations (456) des équations (455),

$$(a - a')z + \alpha - \alpha' = 0, \ldots (457)$$

$$(b - b')z + \beta - \beta' = 0; \ldots (458)$$

et en éliminant z entre les équations (457) et (458), on obtiendra

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0 \ldots (459)$$

Telle est la condition nécessaire pour que ces droites se rencontrent.

551. Si l'on substitue la valeur de z donnée par l'équation (457) dans la première des équations (455), et la valeur de z donnée par l'équation (458) dans la seconde des équations (455), on déterminera les coordonnées x et y du point d'intersection.

Si l'on y joint l'expression de z donnée par l'équation (457), les coordonnées du point d'intersection seront

$$x = a\,\frac{(\alpha' - \alpha)}{a - a'} + \alpha = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'},$$

$$y = b\,\frac{(\beta' - \beta)}{b - b'} + \beta = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'},$$

$$z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'}.$$

552. Lorsque $a' = a$ et que $b = b'$, ces valeurs deviennent infinies.

Par conséquent, les droites se rencontrant à une distance infinie sont parallèles. Ainsi, pour que deux droites dont les équations peuvent, en général, être représentées par les équations (455) et (456) soient parallèles, les conditions de ce parallélisme sont $a = a'$, $b = b'$.

Problème V.

553. *Par un point donné x', y', z', mener une parallèle à la droite, qui a pour équations $x = a'z + \alpha$, $y = b'z + \beta$.*

Cette droite étant assujettie à passer par le point x', y', z', a des équations de cette forme (art. 548) :

$$x - x' = a\,(z - z'), \quad y - y' = b\,(z - z').$$

Pour exprimer la condition du parallélisme, nous ferons

(art. 552)

$$a = a', \quad b = b',$$

et nous trouverons, pour les équations de cette droite,

$$x - x' = a'(z - z', \quad y - y' = b'(z - z').$$

Problème VI.

554. *Trouver la distance de deux points dont les coordonnées sont* x', y', z' et x'', y'', z''.

Soient M et M′ ces points (*fig.* 191), Fig. 191.

$AP = x''$, $PQ = y''$, $QM = z''$, $AP' = x'$, $P'Q' = y'$, $Q'M' = z'$,

leurs coordonnées.

Ayant tiré les droites QQ′, MM′, si du point M le moins élevé au-dessus du plan des x, y on mène une perpendiculaire MN sur l'ordonnée M′Q′, le triangle MNM′ rectangle en N donnera

$$MM'^2 = M'N^2 + MN^2,$$

ou

$$MM'^2 = (z' - z'')^2 + QQ'^2.$$

Le triangle QLQ′ rectangle en L donne

$$QQ'^2 = QL^2 + Q'L^2,$$

ou

$$QQ'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Substituant,

$$MM'^2 = (z' - z'')^2 + (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2; \quad . \; . \; . \; (460)$$

et par conséquent,

$$MM' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2},$$ *expression de la distance de deux points* M, M′.

555. Si le point M′ coïncide avec A (*fig.* 192), MM′ devient AM, et les coordonnées du point A étant nulles, on a Fig. 192.

$$AM^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (461)$$

Théorème.

556. *Démontrer que la somme des carrés des cosinus des angles α, β, γ, qu'une droite fait avec les axes cooordonnées, est égale à l'unité.*

Soient toujours x', y', z' et x'', y'', z'', les coordonnées des
Fig. 191. points M′ et M par lesquels passe une droite MM′ (*fig.* 191); l'angle que cette droite fait avec l'axe des z étant γ, et M′Q′ étant une parallèle à cet axe, l'angle M′ $=\gamma$; et comme l'angle N est droit, on a M′N $=$ MM′ cos M′, ou $z'-z''=$ MM′ $\cos\gamma$. Par la même raison, en projetant deux coordonnées x' et x'' sur le plan des y, z, et deux autres y' et y'' sur le plan des x, z, on prouverait que $y'-y''=$ MM′ $\cos\beta$, et que $x'-x''=$ MM′ $\cos\alpha$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (460), on obtient

$$MM'^2 = MM'^2\cos^2\gamma + MM'^2\cos^2\beta + MM'^2\cos^2\alpha;$$

et en divisant par MM′²,

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1.$$

Problème VII.

557. *Trouver le cosinus de l'angle formé par deux droites qui se rencontrent dans l'espace.*

Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$
$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'$$

Fig. 192. les équations de ces droites. Menons par l'origine (*fig.* 192) deux droites parallèles AL, AL′ à ces droites; les équations de AL et de AL′ seront

$$x = az, \quad y = bz,$$
$$x = a'z, \quad y = b'z.$$

Les droites AL et AL′ formant entre elles le même angle que les droites données, la question se réduit à trouver le cosinus de l'angle LAL′.

Pour cet effet, prenons des parties AM, AM′ égales à l'unité, et menons MM′, nous aurons dans le triangle AMM′ cette relation

$$MM'^2 = AM^2 + AM'^2 - 2\,AM.AM' \cos MAM' \quad (*),$$

qui donne

$$\cos MAM' = \frac{AM^2 + AM'^2 - MM'^2}{2\,AM.AM'} \ldots\ldots (462)$$

En représentant toujours par x', y', z' les coordonnées du point M′, et par x'', y'', z'' celles du point M, nous aurons (art. 384).

$$MM'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'');$$

et, en observant que AM′ exprime la distance du point x', y', z' au point A, dont les trois coordonnées sont nulles, l'équation (461) nous donne

$$AM'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

de même $$AM^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

(*) Pour démontrer cette proposition, de l'une des extrémités de MM′ (*fig.* 193), abaissons la perpendiculaire MN sur le côté opposé, nous avons

Fig. 193.

$$MN = AM \sin A, \quad AN = AM \cos A.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$MM'^2 = MN^2 + (AM' - AN)^2;$$

faisant $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, et réduisant, on obtient la valeur de MM'^2.

En substituant ces valeurs de MM'^2, de AM'^2 et de AM^2 dans l'équation (462), on réduira cette équation à

$$\cos MAM' = 2\frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{2\,AM.AM'},$$

et à cause que $AM = AM' = 1$, cette équation deviendra

$$\cos MAM' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

Cela posé, le point x'', y'', z'' étant pris sur la droite AL qui a pour équations $x = az$, $y = bz$, on aura

$$x'' = az'', \quad y'' = bz''.$$

De même, le point x', y', z' étant sur la ligne AL', les coordonnées x', y', z' satisferont à ses équations, et l'on aura

$$x' = a'z', \quad y' = b'z'.$$

Substituant ces quatre valeurs de x', de y', de x'' et de y'', on trouvera

$$\cos MAM' = (aa' + bb' + 1)\,z'z''. \quad . \quad . \quad . \quad (463)$$

Cherchons maintenant les valeurs de z' et de z'' en fonction des constantes a et b.

On a entre les coordonnées du point M' les trois équations

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Mettant dans la troisième équation les valeurs de x' et de y' tirées des deux premières, il vient

$$z'^2(a^2 + b^2 + 1) = 1;$$

d'où
$$z' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Par un même procédé on trouvera

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Substituant ces valeurs de z' et de z'' dans l'équation (463), on obtient enfin

$$\cos \mathrm{MAM}' = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots (464),$$ *expression du cosinus de l'angle formé par les droites qui ont pour équations* $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, et $x = a'z + \alpha'$, $y = b'z + \beta'$.

Si l'angle MAM′ est droit, $\cos \mathrm{MAM}' = 0$; donc alors $aa' + bb' + 1 = 0$.

Problème VIII.

558. *Trouver les cosinus des angles qu'une droite qui passe par l'origine fait avec les trois axes rectangulaires.*

Ce problème est un cas particulier du précédent; c'est celui où une des droites AL, AL′ (*fig.* 192) coïncide avec l'un des trois axes. Supposons donc que la droite AL′, par exemple, se confonde avec l'axe des z; cet axe, qui est l'intersection commune des plans des x, z et des z, y, est lui-même sa projection sur l'un de ces plans : or, dans les équations $x = a'z$ et $y = b'z$ de la droite AL′, a' et b' sont les tangentes trigonométriques des angles que les projections de la droite sur les plans des x, z et des z, y forment avec l'axe des z; et comme nous venons de voir que les projections et la ligne projetée AL′ se confondent avec l'axe des z, il en résulte que ces tangentes sont nulles; cette hypothèse réduit l'équation (464) à Fig. 192.

$$\cos \mathrm{MAZ} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \ldots (465),$$ *expression du cosinus de l'angle que fait avec l'axe des z la droite qui a pour équations* $x = az$, $y = bz$.

Si la droite AM′ se confond avec l'axe des x, elle se trouve dans la commune section des plans des x, z et des x, y, et par conséquent se confond avec ses projections sur ces plans;

alors l'équation $x = a'z$ mise sous cette forme $z = \frac{1}{a'}\,x$, donnant $\frac{1}{a'}$ pour la tangente trigonométrique de l'angle que la projection de la droite AM′ sur le plan des x, z forme avec l'axe des x, il résulte de ce qui précède que $\frac{1}{a'} = 0$; de même l'équation de la projection sur le plan des x, y étant (*) $y = \frac{b'}{a'}\,x$, on conclut par le même raisonnement que l'on a $\frac{b'}{a'} = 0$. Cela posé, divisons l'équation (464) par a', nous trouverons

$$\frac{a + b\,\frac{b'}{a'} + \frac{1}{a'}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + \frac{b'^2}{a'^2} + \frac{1}{a'^2}}};$$

effaçant les termes qui sont nuls, cette équation deviendra

$$\cos \mathrm{MAX} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad . \; . \; (466),$$ *expression du cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x une droite qui a pour équations* $x = az$, $y = bz$.

Enfin on trouvera, par le même procédé,

$$\cos \mathrm{MAY} = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad . \; . \; (467),$$ *expression du cosinus de l'angle que fait avec l'axe des y une droite qui a pour équations* $x = az$, $y = bz$. (*Note vingt-troisième.*)

(*) Cette équation se tire des équations $x = a'z$, $y = b'z$, en éliminant z.

Problème IX.

559. *Connaissant les cosinus des angles que forment deux droites avec les axes coordonnés, trouver l'expression du cosinus de l'angle qui est compris entre ces droites.*

Soient α, β, γ les angles que la première droite forme avec les axes des x, des y et des z; α', β', γ' les angles que la seconde droite forme avec les axes des x, des y et des z; et φ l'angle que ces droites forment entre elles.

Les équations de ces droites étant représentées par

$$x = az + \alpha, \quad x = a'z + \alpha',$$
$$y = bz + \beta, \quad y = b'z + \beta',$$

on aura (art. 558)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$
$$\cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

en multipliant par ordre les termes correspondants de ces deux lignes, on trouvera

$$aa' = \cos\alpha\cos\alpha'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2},$$
$$bb' = \cos\beta\cos\beta'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2},$$
$$1 = \cos\gamma\cos\gamma'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (464) du cosinus de l'angle formé par deux droites (art. 557), elle deviendra

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

expression du cosinus de l'angle formé par deux droites, donnée en fonction des cosinus des angles que ces droites font avec les trois axes coordonnés.

CHAPITRE VI.

De l'équation du plan.

560. On appelle *traces* les intersections d'un plan, ou d'une surface, avec les plans coordonnés.

561. Considérons d'abord un plan qui passe par l'origine; il est certain que si l'on donne (*fig.* 194) les traces AG, AK d'un plan avec les plans coordonnes ZAX, ZAY, ou, ce qui est la même chose, si l'on donne leurs équations, la position de ce plan sera fixée. Par conséquent, lorsqu'on aura assigné des valeurs arbitraires à x et à y, celle de z en résultera, car elle sera déterminée par l'intersection du plan avec cette coordonnée z. Il existe donc une relation nécessaire entre x, y et z; cette relation est ce qu'on appelle l'*équation du plan.*

Fig. 194.

PROBLÈME Ier.

562. *Trouver l'équation du plan.*

Fig. 195. Soient AB, AC (*fig.* 195) les traces du plan donné sur les plans XAZ, YAZ. Si par le point M situé sur le plan, on tire dans ce plan une parallèle MD à la trace AB, cette parallèle rencontrera l'autre trace AC au point D. Menons par ce point D une parallèle DE à l'axe des x; les angles MDE, BAX, formés par des côtés parallèles, prouvent le parallélisme des plans MDE, BAX. Or ce dernier plan est le même que le plan ZAX, qui est perpendiculaire aux deux autres plans coordonnés, XAY et YAZ. Le plan MDE sera donc aussi perpendiculaire aux plans XAY et YAZ.

Il suit de là que si, du point M on abaisse une perpendiculaire MQ sur le plan XAY, cette perpendiculaire sera dans le plan MDE; par conséquent, les droites DE et MQ, qui sont

parallèles aux axes des x et des z, se couperont à angle droit, dans le plan MDE, en un point G.

Cela posé, il est visible que $MQ = QG + MG$.

Or, toutes les perpendiculaires abaissées sur le plan XAY des points de la parallèle DE, étant égales et ayant la même ordonnée y, il en résulte que

$$GQ = DH = AH \text{ tang } DAH = y \text{ tang } DAH.$$

On a, d'autre part,

$$MG = DG \text{ tang } MDE;$$

et parce que les angles MDE, BAX sont égaux, et que la parallèle DG à l'axe des x, étant comprise entre le plan ZAY et l'ordonnée MQ, est égale à l'abscisse AP, on pourra, au lieu de tang MDE et de DG, substituer tangente BAX et la valeur x de AP dans l'expression de MG, et l'on aura

$$MG = x \text{ tang } BAX.$$

Si l'on met dans l'équation

$$MQ = QG + MG,$$

les valeurs que nous venons de trouver pour QG et pour MG, on obtiendra

$$MQ \text{ ou } z = y \text{ tang } DAH + x \text{ tang } BAX.$$

Nommons b et a ces tangentes des angles DAH, BAX formés par les traces avec les axes des y et des x, nous aurons

$$z = ax + by, \quad \textit{équation du plan qui passe par l'origine.}$$

563. Si le plan ne passe pas par l'origine, il rencontrera l'axe des z ou son prolongement. Supposons donc que le plan C′B′ (*fig.* 196) intercepte l'axe des z en A′, et soient x, y, z les coordonnées d'un point M′ de ce plan. Si, par l'ori- Fig. 196.

gine A, l'on mène un plan CB parallèle au plan C'B', et qu'on nomme z' l'ordonnée QM de ce second plan, QM et QM' différeront de $MM' = AA' = c$; on aura donc $z = z' + c$. L'ordonnée z' appartenant au plan CB, qui passe par l'origine, on aura (art. 462) $z' = ax + by$; par conséquent l'équation précédente deviendra $z = ax + by + c$. Si le plan coupe l'axe des z sur son prolongement, c changera de signe.

564. Pour donner plus de symétrie à l'équation précédente, on la multipliera par la quantité arbitraire C; faisant ensuite passer tous les termes dans le premier membre, on aura

$$Cz - Cax - Cby - Cc = 0,$$

et faisant

$$-Ca = A, \quad -Cb = B, \quad -Cc = D,$$

cette équation deviendra

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \textit{équation générale du plan.}$$

Problème II.

565. *Trouver l'équation d'un plan perpendiculaire à l'un des axes coordonnés.*

Si ce plan, par exemple, est perpendiculaire à l'axe des z, tous les z seront égaux; on aura donc pour l'équation de ce plan

$$z = \textit{constante}.$$

Par la même raison, si ce plan est perpendiculaire à l'axe des y, son équation sera

$$y = \textit{constante}.$$

Enfin, si ce plan est perpendiculaire à l'axe des x, son équation sera

$$x = \textit{constante}.$$

Pour l'une de ces équations, les deux variables qu'elle ne renferme pas sont arbitraires; par exemple, si l'on avait $z = a$, et qu'on prît au hasard $x = m$, $y = n$, les trois coordonnées m, n et a suffiraient pour déterminer un point du plan.

Problème III.

366. *Trouver la distance de l'origine, au point où le plan rencontre l'un des axes.*

Considérons le point où le plan proposé coupe l'axe des z. Ce point jouira de la propriété de tous ceux qui sont sur cet axe : or, pour tous les points de cet axe, $x = 0$ et $y = 0$. Substituant donc ces valeurs dans l'équation du plan, on la réduira à

$$Cz + D = 0;$$

d'où l'on tirera

$$z = -\frac{D}{C}$$

pour l'ordonnée du point d'intersection, c'est-à-dire pour la distance de l'origine au point où le plan proposé coupe l'axe des z. Ce que nous disons de cet axe peut s'appliquer aux autres.

Problème IV.

367. *Trouver les équations de la trace d'un plan sur l'un des plans coordonnés.*

Prenons d'abord le plan des x, y pour ce plan coordonné, la trace étant formée par les points du plan proposé qui se trouvent sur le plan des x, y; en faisant $z = 0$ dans l'équation du plan représenté par $Ax + By + Cz + D = 0$, on la réduira à celle de la trace, et l'on aura par conséquent

$Ax + By + D = 0$, *équation de la trace sur le plan des x, y.*

En faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, on aura de même

$By + Cz + D = 0$, *équation de la trace sur le plan des y, z;*

$Ax + Cz + D = 0$, *équation de la trace sur le plan des x, z.*

Problème V.

568. *Trouver l'équation d'un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.*

Supposons que ce plan coordonné soit le plan des x, y,
Fig. 197. l'équation de la trace BC (*fig.* 197) sur le plan des x, y pourra donc être représentée par $y = ax + b$. Si l'on prend sur le plan des x, y un point Q, et que ses coordonnées x', y' satisfassent à cette équation, ce point sera sur la trace; élevons en ce point une ordonnée $QM = z$, cette ordonnée se confondra avec le plan, et par conséquent, quelque valeur qu'on lui donne, elle déterminera toujours un point qui appartiendra au plan : on voit donc que, dans ce cas, x et y sont liés entre eux par l'équation de la trace du plan BD, et que z est arbitraire.

Cette démonstration pouvant s'appliquer aux plans des y, z et des z, x, on est en droit de conclure que l'*équation d'un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés se réduit à celle de sa trace sur ce plan.*

569. Enfin, si l'on se proposait de trouver l'équation d'un plan perpendiculaire au plan des x, y, et passant par l'origine, la constante b serait nulle, et l'équation se réduirait à $y = ax$.

Ceci s'applique encore aux autres plans coordonnés.

Théorème.

570. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur l'un des plans coordonnés est perpendiculaire à la trace du plan sur le plan coordonné.*

Fig. 198. Pour le démontrer, soient (*fig.* 198) MN le plan coor-

donné, BG le plan proposé, ED la perpendiculaire à ce plan, CD la projection de ED sur MN. Le plan projetant EDC est perpendiculaire à MN; et, puisqu'il renferme ED, il est aussi perpendiculaire au plan BG. Donc le plan CDE est à la fois perpendiculaire aux plans MN et BG. Donc il l'est à leur commune section AB, qui est la trace du plan donné sur le plan MN. Il suit de là que la trace AB est aussi perpendiculaire sur CDE, et doit l'être à toute droite menée dans le plan CDE. Par conséquent elle le sera à la droite CD, qui est la projection de la droite ED.

Problème VI.

571. *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les coordonnées de ces points; on a, pour déterminer les constantes A, B, C, D, les équations

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

desquelles, en éliminant successivement deux des indéterminées A, B, C, on tirera ces résultats de même forme :

$$A = A'D, \quad B = B'D, \quad C = C'D,$$

et l'équation du plan deviendra

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0.$$

En effet, en divisant ces équations par D, et faisant $\frac{A}{D} = A'$, $\frac{B}{D} = B'$, $\frac{C}{D} = C'$, on aura trois équations pour déterminer les inconnues A', B', C'; on pourra donc, en éliminant deux de

ces inconnues, obtenir $A' = f(x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''')$, c'est-à-dire $\frac{A}{D} = f(x', \text{etc.})$, et faisant $f(x', \text{etc.}) = A'$, on obtiendra $A = A'D$. On déterminera de même les valeurs de B et de C.

Problème VII.

572. *Trouver la condition nécessaire pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan.*

Soient
$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha, \ldots \quad (468) \\ y &= bz + \beta, \ldots \quad (469) \end{aligned}\right\} \textit{les équations de la droite,}$$
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \textit{l'équation du plan.}$$

En faisant $y = 0$, on aura (art. **567**), pour l'équation de la trace sur le plan des x, z,
$$Ax + Cz + D = 0, \quad \text{ou} \quad z = -\frac{Ax}{C} - \frac{D}{C}.$$

Cette équation (art. **570**) doit être celle d'une perpendiculaire à la projection sur le plan des x, z. L'équation (468), qui est celle de cette projection, donne
$$z = \frac{x}{a} - \frac{\alpha}{a}.$$

Or, pour qu'elle soit celle d'une perpendiculaire à la droite dont l'équation est
$$z = -\frac{Ax}{C} - \frac{D}{C},$$
il faut (art. **232**) que le coefficient de x de l'une soit égal à l'unité divisée par le coefficient de x de l'autre, pris avec un signe contraire, c'est-à-dire que $\frac{A}{C} = a$, et qu'on ait par conséquent $A = aC$.

On trouverait de même, en comparant l'équation (469) à l'équation de la trace sur le plan des y, z, qu'on doit avoir pour la seconde condition $B = bC$.

Problème VIII.

573. *Un point x', y', z' étant donné sur un plan, trouver la condition nécessaire pour qu'une droite soit perpendiculaire en ce point à ce plan.*

Soient toujours $\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha, \\ y = az + \beta, \end{array}\right\}$ *les équations de la droite,*

et $\quad Ax + By + Cz + D = 0$ *celle du plan;*

le point x', y', z' étant sur le plan, on aura

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (470)$$

éliminant D entre ces équations, on obtiendra

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0; \quad . \quad . \quad (471)$$

et comme on a démontré (art. 572) qu'on avait

$$A = aC, \quad B = bC,$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (471), cette équation deviendra

$$a(x - x')C + b(y - y')C + C(z - z') = 0;$$

et en supprimant le facteur commun, il restera

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0. \quad . \quad . \quad (472)$$

Problème IX.

574. *Trouver la condition nécessaire pour qu'une droite soit parallèle à un plan.*

Soient $\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{array}\right\}$ *les équations de la droite,*

et $\quad Ax + By + Cz + D$ *celle du plan.*

Si par l'origine on fait passer une droite et un plan parallèles respectivement à la droite et au plan donnés, les équations de cette droite menée par l'origine seront représentées par

$$x = az, \quad y = bz,$$

et celle du plan par

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Cette droite et le plan ayant un point commun qui est l'origine, doivent coïncider à cause de la condition du parallélisme.

Les coordonnées x et y de la droite devront donc, dans tous les cas, satisfaire à l'équation du plan. En les substituant dans cette équation, il viendra

$$Aaz + Bbz + Cz = 0;$$

et en divisant par z, on aura pour la condition demandée

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Problème X.

575. *Trouver les conditions nécessaires pour que deux plans soient parallèles.*

Soient $\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{array}\right\}$ *les équations de ces plans.*

Les traces des deux plans sur l'un quelconque des plans coordonnés seront parallèles, autrement les plans proposés s'atteindraient. Les équations de ces traces sur le plan des x, z se déduisent de celles des plans (art. 567), et sont

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}, \quad z = -\frac{A'}{C'}x - \frac{D'}{C'}.$$

La condition pour que ces traces soient parallèles sera donc

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}.$$

En considérant les deux autres plans coordonnés, on trouverait de même ces autres conditions :

$$\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

PROBLÈME XI.

576. *Par un point donné x', y', z', ayant mené une perpendiculaire à un plan, trouver la portion de cette perpendiculaire, qui est comprise entre le point x', y', z', et le plan.*

Soient (art. 548 et 564)

$$\left.\begin{array}{ll} x - x' = a(z - z'), \ldots & (473) \\ y - y' = b(z - z'), \ldots & (474) \end{array}\right\} \textit{les équations de la droite,}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ldots \quad (475) \qquad \textit{l'équation du plan.}$$

Si nous regardons les coordonnées x, y, z comme les mêmes dans ces équations, ce sera admettre que ces coordonnées appartiennent au point d'intersection.

Cela posé, les équations (473) et (474) nous donnent

$$x = a(z - z') + x', \quad y = b(z - z') + y'.$$

Multipliant la première de ces équations par A, et l'autre par B, nous aurons les valeurs des termes Ax et By de l'équation (475), que nous substituerons dans cette équation, et nous obtiendrons

$$(Aa + Bb)(z - z') + Cz + Ax' + By' + D = 0;$$

ou $$(Aa + Bb + C)(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0;$$

d'où nous tirerons

$$z - z' = -\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{Aa + Bb + C}.$$

Substituant dans cette expression les valeurs de a et de b données par les équations $A = aC$, $B = bC$, qui ont lieu (art. 572), parce que la droite est perpendiculaire au plan, nous ob-

tiendrons

$$z - z' = -\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{\frac{A^2}{C} + \frac{B^2}{C} + C}$$

$$= -\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}C.$$

Cette valeur et celles de a et de b étant mises dans les équations (473) et (474), nous aurons

$$x - x' = -A\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y - y' = -B\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'expression de la distance de deux points (art. 554)

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

deviendra

$$\sqrt{\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

et exprimera la distance du point d'intersection au point x', y', z'.

Problème XII.

577. *Trouver l'angle formé par deux plans.*

On sait que si d'un point quelconque, pris hors de ces plans, on leur mène deux perpendiculaires, l'angle de ces perpendiculaires sera le même que celui des plans (*).

(*) Pour le démontrer, soient les plans AB et CD (*fig.* 199) sur lesquels on abaisse d'un point M les deux perpendiculaires MP, MQ. Si

Cela posé, soient

$$x = az + \alpha, \qquad x = a'z + \alpha',$$
$$y = bz + \beta, \qquad y = b'z + \beta',$$

les équations de deux droites. Pour que la première soit perpendiculaire au plan qui a pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

il faut (art. 572) qu'on ait

$$A = aC, \quad B = bC.$$

Pour que la seconde soit perpendiculaire au plan qui a pour équation

$$A'x + B'y + C'z = D' = 0,$$

il faut qu'on ait

$$A' = a'C', \quad B' = b'C'.$$

Si, au moyen de ces équations on élimine a, a', b et b', dans l'expression (464) du cosinus de l'angle formé par ces droites (art. 557), que nous appellerons φ, on trouvera

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$ *expression du cosinus de l'angle formé par deux plans qui ont pour*

---

par ces perpendiculaires on mène un plan MPOQ, ce plan sera donc perpendiculaire à chacun des plans AB, CD; par conséquent, la commune section AD de ces plans sera perpendiculaire au plan MPOQ. Réciproquement les traces QO, OP seront perpendiculaires à OD, et l'angle QOP mesurera l'inclinaison des plans : or les angles LMP et POQ sont égaux, car la somme des quatre angles du quadrilatère valant quatre angles droits, comme les angles en P et en Q sont droits, en les retranchant de cette somme, il restera

$$POQ + PMQ = 2 \text{ angles droits.}$$

Donc POQ = LMP; c'est-à-dire que l'angle qui mesure l'inclinaison des plans est égal à celui qui est formé par les perpendiculaires.

équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

578. Si les plans sont perpendiculaires, l'angle φ devenant droit, le cosinus φ s'évanouit, et l'on a

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Enfin, si le plan dont l'équation est

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

représente le plan des x, y, cette équation se réduit à $z = 0$; car l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe des z étant $z =$ *constante*, devient $z = 0$, lorsque le plan coïncide avec le plan des x, y. En comparant l'équation $z = 0$ avec l'équation

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

on voit que

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 1, \quad D' = 0.$$

Substituant ces trois premières valeurs dans l'expression de $\cos\varphi$, et appelant γ ce que devient φ dans cette nouvelle hypothèse, on trouve

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$ *expression du cosinus de l'angle que le plan, dont l'équation est* $Ax + By + Cz + D$, *forme avec le plan des* x, y.

Si l'on appelle β et α les angles que le plan forme avec les plans des x, z et des y, z, on trouverait de même

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

579. Soient α', β', γ' les angles qu'un second plan forme avec les plans coordonnés. Si dans l'expression de $\cos\varphi$ de

l'art. 577, on fait la même transformation que dans l'art. 589, on trouvera

$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$, *expression du cosinus de l'angle de deux plans en fonction des cosinus de ces plans avec les plans coordonnés.*

Problème XIII.

580. *Trouver l'angle formé par une droite et un plan.*

Soient
$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$ *les équations de la droite et celle du plan.*

Représentons cette droite par PQ (*fig.* 200); sa projection sur le plan MN sera PR, et l'angle QPR mesurera l'inclinaison de la droite sur le plan; et puisque QR est perpendiculaire sur le plan MN, cette droite QR sera inclinée sur celui des x, y, et aura des équations de même forme que celles de PQ, mais qui en différeront par les constantes, que nous accentuerons pour les distinguer des autres, de sorte que nous aurons Fig. 200.

$$\left.\begin{aligned} x &= a'z + \alpha' \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned}\right\}, \text{ équations de la droite QR.}$$

Cette droite étant perpendiculaire au plan, on aura (art. 572)

$$A = a'C, \quad B = b'C.$$

Mettant les valeurs de a' et de b' données par ces équations dans l'expression (464) du cosinus de l'angle PQR, que ces droites forment entre elles (art. 557), on trouvera

$$\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

pour l'expression du cosinus de l'angle PQR ou du sinus de l'angle QPR formé par la droite avec le plan.

Si la droite PQ devient parallèle au plan, le sinus de l'angle QPR est nul, et l'expression précédente se réduit à $Aa + Bb + C = 0$.

Problème XIV.

581. *Trouver l'équation de l'intersection de deux plans.*

Soient

$Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ *les équations de ces plans.*

Les coordonnées seront les mêmes pour tous les points de la commune section; on peut donc éliminer successivement l'une des variables, par exemple y, et ensuite x, et l'on aura des équations que nous pourrons représenter par

$$x = Mz + N, \quad y = M'z + N'.$$

Ces équations appartiendront à une ligne droite qui sera la commune section des plans.

Problème XV.

582. *Trouver la plus courte distance de deux droites situées dans l'espace.*

Prenons l'une de ces droites pour l'axe des z; par un point M de cet axe AZ (*fig.* 201), menons la droite arbitraire MN sur l'autre droite BC. Si MN ne coupait pas BC à angle droit, on pourrait abaisser du point M une perpendiculaire MP qui serait toujours plus courte que MN, ce qui est contre l'hypothèse. La ligne la plus courte doit donc être perpendiculaire à BC; on prouverait de même qu'elle doit être perpendiculaire à AZ.

Fig. 201.

Cela posé, soit MN (*fig.* 202) cette plus courte distance; et au point N, menons une parallèle NN' à AZ; MN étant, par hypothèse, perpendiculaire aux droites CB et AZ, doit l'être aussi à la parallèle NN' à cette dernière, ainsi qu'au plan CNN' formé par les droites CB, NN'. Ce plan CNN', qui contient une parallèle à AZ, est per-

Fig. 202.

pendiculaire au plan des x, y, et sa trace est la projection de la droite CB, puisque cette trace est le lieu de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de CB. Or, si l'on mène par l'origine A une perpendiculaire AG à la trace DE, cette droite AG, qui se trouve dans le plan des x, y, sera donc aussi perpendiculaire au plan DEBC; ainsi nous avons deux perpendiculaires AG, MN qui sont abaissées sur le plan DEBC de deux différents points d'une parallèle AM à ce plan; donc ces perpendiculaires sont égales.

Soit $y = Ax + B$ l'équation de la projection DE; l'angle AFH est celui dont la tangente est A; or, dans les triangles rectangles HAG, HAF, on voit que l'angle AHG est complément de F et de HAG; donc AHG = F; par conséquent AG = AH cos HAG; on aura donc AG = AH cos F. Pour déterminer cos F, nous avons

$$\text{tang F} = A; \quad \text{donc} \quad \text{séc F} = \sqrt{1 + A^2} \quad \text{et} \quad \cos F = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Au moyen de cette dernière valeur, l'expression de AG deviendra

$$\frac{AH}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}},$$ *expression de la plus courte distance des droites* AZ *et* BC.

CHAPITRE VII.

De la sphère.

585. Soient a, b, c les coordonnées du centre O de la sphère (*fig.* 203), et x, y, z celles d'un point M de la surface, la distance OM sera déterminée (art. 554) par l'équation (460) Fig. 203.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = OM^2;$$

et comme, d'après la nature de la sphère, la distance OM est constante, si nous désignons cette distance par r, nous aurons donc, pour l'équation de la sphère,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \quad . \quad . \quad (476)$$

584. Si l'origine des coordonnées est au centre de la sphère,

on aura

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0;$$

et l'équation (476) se réduira à

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots (477)$$

Après avoir choisi l'un des plans coordonnés pour celui des x, y, si l'on prend la variable z égale à une constante c, la sphère sera coupée par un plan parallèle à celui des x, y. Cette équation deviendra

$$x^2 + y^2 + c^2 = r^2;$$

mise sous cette forme

$$x^2 + y^2 = r'^2 - c^2,$$

elle exprimera celle d'une courbe tracée sur le plan sécant; et l'on voit que cette courbe sera un cercle dont le rayon r' aura pour expression $\sqrt{r^2 - c^2}$. Ce rayon sera toujours moindre que r, puisque son carré r'^2 est exprimé par $r^2 - c^2$, et l'on voit que ce rayon ne pourra surpasser r; car, dans cette hypothèse $\sqrt{r^2 - c^2}$ deviendrait une quantité imaginaire.

585. Si nous prenons le centre de la sphère pour origine des coordonnées, et que nous menions un rayon au point x', y', z', comme ce rayon passe aussi par le centre, dont les coordonnées sont nulles, en faisant $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$ dans les formules (454), on trouvera, pour les équations du rayon de la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées,

$$x = \frac{x'}{z'} z, \quad y = \frac{y'}{z'} z; \ldots\ldots\ldots (478)$$

nous avons vu que les équations d'une droite dans l'espace sont, en général,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta;$$

mais, dans le cas présent, cette droite n'étant autre chose qu'un rayon qui passe par le centre, ses équations se réduisent à

$$x = az, \quad y = bz,$$

et, comparées aux équations (478), nous donnent

$$a = \frac{x'}{z'}, \quad b = \frac{y'}{z'}; \ldots\ldots\ldots (479)$$

et comme cette droite assujettie à passer par un point x', y', z' est perpendiculaire à un plan, on a la relation (art. 573)

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0. \ldots (480)$$

Les valeurs de a et de b données par l'équation (479), étant mises dans l'équation (480), on obtient

$$\frac{x}{z}(x - x') + \frac{y}{z}(y - y') + z - z' = 0;$$

chassant le dénominateur, il reste

$$x(x - x') + y(y - y') + z(z - z') = 0;$$

développant et remplaçant la somme des carrés des variables par r^2, on trouve

$$x'x + y'y + z'z = r^2.$$

D'une autre part, d'après la nature de la sphère, nous avons entre les mêmes coordonnées cette équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2;$$

d'où il suit que, pour déterminer les trois coordonnées x', y', z' du point de contact, nous n'avons que deux équations; par conséquent, le problème de déterminer ce point de contact restant indéterminé, on peut faire passer une infinité de plans par ce point.

—

CHAPITRE VIII.

De l'ellipsoïde.

586. La sphère n'est qu'un cas particulier d'une autre surface connue sous le nom *d'ellipsoïde*, et dont la solution du problème suivant va nous faire obtenir l'équation : *Étant*
Fig. 204. *donnés trois axes rectangulaires* AX, AY, AZ (*fig.* 204), *déterminer la surface courbe qui étant rapportée à ces axes donne, pour les sections faites par les plans coordonnés, des sections elliptiques dont les axes principaux soient les axes coordonnés, et qui donne, pour toutes les sections perpendiculaires à l'un de ces axes coordonnés, des sections elliptiques dont les axes principaux soient parallèles aux deux autres axes coordonnés.*

Pour obtenir la solution de ce problème, menons par un point M de la surface courbe une perpendiculaire MP sur le plan des x, y, et PI parallèle à l'axe AX; les coordonnées du point M seront

$$\mathrm{AI} = y, \quad \mathrm{IP} = x, \quad \mathrm{PM} = y.$$

Cela posé, menons par le point M un plan GMK parallèle au plan des x, y. Ce point M sera sur la courbe GMK, qui par hypothèse est une ellipse, et tous les points de cette ellipse auront pour ordonnée, dans le sens de l'axe Az, une ordonnée constante $z = \mathrm{AO}$.

Les équations des sections DGO, DKO appartenant, par hypothèse, à des ellipses, la première subsistera entre x et z, et la seconde entre y et z, et en les représentant de la sorte

$$c^2x^2 + a^2z^2 = a^2c^2,$$

$$c^2y^2 + b^2z^2 = b^2c^2,$$

elles donneront

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2).$$

Ces valeurs de x^2 et de y^2 deviennent (*fig.* 204) OG^2 et OK^2 lorsque nous prenons $z = MP$ ou OA. Nous aurons donc, dans cette hypothèse de z, Fig. 204.

$$OG^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2), \quad OK^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2). \quad . \quad . \quad (481)$$

Mais la courbe KMG, qui résulte de la section faite au point M par un plan parallèle à celui des x, y, est, par hypothèse, une ellipse qui a OG et OK pour demi-axes. Par conséquent on aura, d'après la nature de l'ellipse (art. 262),

$$OK^2 . x^2 + OG^2 . y^2 = OG^2 \times OK^2;$$

et, en divisant par $OG^2 \times OK^2$, il restera

$$\frac{x^2}{OG^2} + \frac{y^2}{OK^2} = 1.$$

Substituant les valeurs de OG^2 et de OK^2 fournies par les équations (481), on obtiendra

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2)} = 1;$$

multipliant les deux termes du premier membre par c^2, on aura

$$\frac{c^2 x^2}{a^2(c^2 - z^2)} + \frac{c^2 y^2}{b^2(c^2 - z^2)} = 1;$$

et, en multipliant ensuite tous les termes de l'équation par a^2b^2, on trouvera

$$\frac{b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2}{c^2 - z^2} = a^2b^2;$$

faisant évanouir le dénominateur, on obtiendra

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 = a^2b^2c^2 - a^2b^2z^2;$$

et, en faisant passer le terme en z^2 dans le premier membre, il

restera

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2. \ldots \ldots (482)$$

Telle sera l'équation de la surface courbe appelée *ellipsoïde*.

587. Si pour simplifier nous remplaçons les produits constants par les lettres L, M, N, P, l'équation de l'ellipsoïde prendra cette forme,

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = P. \ldots \ldots (483)$$

et renfermera les mêmes propriétés que l'équation (482), pourvu qu'on regarde L, M, N et P comme des quantités essentiellement positives; condition qui résulte de la nature des coefficients de x^2, de y^2 et de z^2, qui sont des carrés. Faisons donc abstraction de l'équation (482), et, analysant l'ellipsoïde d'après l'équation (483), cherchons d'abord les traces de l'ellipsoïde sur chacun des plans coordonnés. Pour cela, il suffit de faire successivement, dans l'équation (483),

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0,$$

ce qui donne

$Lx^2 + My^2 = P \ldots$ (484), *équat. de la trace sur le plan des x, y.*

$My^2 + Nz^2 = P \ldots$ (485), *équat. de la trace sur le plan des y, z,*

$Lx^2 + Nz^2 = P \ldots$ (486), *équat. de la trace sur le plan des x, z.*

588. On appelle ces traces les *sections principales de la surface.*

589. Les équations (484), (485) et (486) montrent que ces traces sont des ellipses.

Coupons ensuite la surface par un plan parallèle au plan des x, y, l'équation de ce plan, en désignant par γ une constante, sera (art. 565)

$$z = \gamma.$$

Si entre cette équation et celle de la surface on élimine z, on

aura, pour l'équation de l'intersection des deux surfaces,

$$Lx^2 + My^2 + N\gamma^2 = P,$$

ou plutôt

$$Lx^2 + My^2 = P - N\gamma^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (487)$$

On voit que cette équation sera celle d'une ellipse tant qu'on donnera à γ une valeur assez petite pour que $P - N\gamma^2$ reste positif.

590. On peut même déterminer les axes de cette ellipse formée par la section d'un plan parallèle à celui des x, y; car, en divisant les deux termes de l'équation (487) par $P - N\gamma^2$, on la mettra sous cette forme

$$\frac{x^2}{\left(\frac{P - N\gamma^2}{L}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{P - N\gamma^2}{M}\right)} = 1;$$

et, en observant que L, M, N et P sont des quantités essentiellement positives, et que les dénominateurs du premier membre doivent être de deux dimensions, on aura, pour déterminer les demi-axes représentés par a et par b,

$$a^2 = \frac{P - N\gamma^2}{L}, \quad b^2 = \frac{P - N\gamma^2}{M};$$

et l'on voit qu'à mesure qu'on écartera le plan sécant de celui des x, y, les parties négatives des valeurs de a^2 et de b^2 s'accroissant, les demi-axes a et b diminuent jusqu'à ce que $N\gamma^2$ atteigne P, cas où l'ellipse étant réduite à un point, le plan sécant devient un plan tangent; mais si le plan sécant continue à s'écarter de celui des x, y, il n'y a plus d'intersection, puisque l'équation (487) se réduit à

$$Lx^2 + My^2 = \textit{quantité négative};$$

équation absurde, parce que (art. 587), L et M sont essentiellement positifs.

591. En faisant ensuite successivement $x = \alpha$, $y = 6$ dans l'équation (483), on trouvera de même les équations des intersections par des plans parallèles au plan des y, z et des x, z; et l'on prouvera, comme dans l'article précédent, que ces sections sont des ellipses.

592. Pour déterminer les axes principaux de l'ellipse, qui est la trace de l'ellipsoïde sur le plan x, y, on fera successivement $y = 0$ et $x = 0$, dans l'équation

$$Lx^2 + My^2 = P,$$

qui, ainsi qu'on l'a vu art. 587, est celle de la trace sur le plan des x, y; et, en représentant par AB et par AC
Fig. 204. (*fig.* 204) ce que deviennent dans ces hypothèses x et y, on trouvera

$$AB = \sqrt{\frac{P}{L}}, \quad AC = \sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Au moyen de ces valeurs des demi-axes principaux, il sera facile de décrire l'ellipse qui est la trace de la surface sur le plan des x, y.

On construira de même les ellipses qui sont les traces de la surface sur les plans des x, z et des y, z; puisque les équations (485) et (486) donnent

$$AB = \sqrt{\frac{P}{L}}, \quad AD = \sqrt{\frac{P}{N}}, \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{\frac{P}{M}}, \quad AD = \sqrt{\frac{P}{N}},$$

pour les demi-axes principaux de ces ellipses.

Si l'on ne considère que la portion de la surface comprise dans l'angle solide où les coordonnées sont positives, les traces sur les plans des x, y, des x, z, des y, z seront repré-
Fig. 205. sentées (*fig.* 205) par les arcs elliptiques BEC, BFD, CGD.

Toutes les sections de la surface par les plans parallèles aux plans coordonnés peuvent maintenant se déterminer facilement.

Par exemple, si l'on donne l'abscisse AP, et qu'on demande la section faite par un plan parallèle au plan des y, z, et qui coupe l'axe des x en P, on mènera par le point P des parallèles PC′ et PD′ aux axes AY et AZ, et alors PC′ et PD′ seront les demi-axes de l'ellipse qui forme cette section : le quart de cette ellipse est représenté par C′G′D′.

Les traces de l'ellipsoïde sur l'un des plans coordonnés, contenant tous les points de la surface qui sont dans ce plan, il en résulte que si l'un des deux axes situés dans ce plan doit rencontrer la surface, cette rencontre aura lieu aux points qui sont communs à la trace et à l'axe. Les droites 2AB, 2AC, 2AD sont donc les parties des axes principaux, interceptées par la surface : c'est pourquoi on les appelle les *axes principaux de l'ellipsoïde.*

593. Pour remonter aux valeurs des axes principaux de l'ellipsoïde au moyen de l'équation (483), il suffit de faire successivement deux des coordonnées nulles dans cette équation, et en nommant a, b, c ce que deviennent dans ces hypothèses x, y, z, on trouvera

$$a = \sqrt{\frac{P}{L}}, \quad b = \sqrt{\frac{P}{M}}, \quad c = \sqrt{\frac{P}{N}};$$

en élevant ces équations au carré, elles donnent

$$L = \frac{P}{a^2}, \quad M = \frac{P}{b^2}, \quad N = \frac{P}{c^2} \quad (*) \ldots (488)$$

(*) Observons que ces équations résultent immédiatement de l'hypothèse de l'art. 587, par laquelle l'équation (483) remplace l'équation (482); car nous avons alors

$$b^2c^2 = L, \quad a^2c^2 = M, \quad a^2b^2 = N, \quad a^2b^2c^2 = P;$$

et, en divisant successivement la dernière équation par les autres, nous obtenons

$$a^2 = \frac{P}{L}, \quad b^2 = \frac{P}{M}, \quad c^2 = \frac{P}{N},$$

équations qui sont les mêmes que les équations (488).

Substituant ces valeurs dans l'équation (483) de l'ellipsoïde, réduisant au même dénominateur et supprimant le facteur commun P, on retombera sur

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (489)$$

équation de l'ellipsoïde rapportée à ses axes principaux.

594. Pour avoir la section de l'équation d'un plan qui passe par l'axe des z, ce plan étant perpendiculaire au plan des x, y, son équation se réduit (art. 568) à celle de sa trace AC
Fig. 206. (*fig.* 206) sur le plan des x, y. Si l'on nomme donc φ l'angle XAC, l'équation de cette trace sera (art. 207 et 208)

$$y = x \operatorname{tang} \varphi ;$$

en éliminant y entre cette équation et l'équation (482) de l'ellipsoïde, on aura pour celle de la section

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2 \operatorname{tang}^2 \varphi . x^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Fig. 207. On voit (*fig.* 207) que chaque point M de la section est déterminé au moyen des coordonnées $AP = x$ et $QM = z$; mais comme en employant ce système de coordonnées on a le désavantage de n'avoir pas l'abscisse x dans le plan de la section, nous changerons l'axe AX en un autre axe AC, en prenant une nouvelle abscisse $AQ = r$, et nous aurons entre ces coordonnées la relation

$$AP = AQ \cos \varphi ,$$

ou

$$x = r \cos \varphi ;$$

et, observant que $\operatorname{tang} \varphi \cos \varphi = \sin \varphi$, il viendra

$$(b^2c^2 \cos^2 \varphi + a^2c^2 \sin^2 \varphi) r^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

595. Si $a = b$, cette équation se réduit à

$$c^2r^2 + a^2z^2 = a^2c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (490)$$

Cette équation étant indépendante de l'angle φ, on doit

conclure que lorsque $a = b$, la section est toujours la même, et que, par conséquent, la surface peut s'engendrer en faisant tourner autour de l'axe des z une ellipse qui aurait pour équation

$$c^2r^2 + a^2z^2 = a^2c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (491)$$

596. En général, toute surface courbe engendrée par la révolution d'un arc de courbe autour d'un axe fixe, est ce qu'on appelle une *surface de révolution*.

En faisant donc $a = b$ dans l'équation (489), on aura pour l'équation de l'ellipsoïde de révolution

$$c^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 = a^2c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (492)$$

597. Un des caractères des surfaces de révolution est qu'on obtient des cercles pour toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe z de révolution; ainsi, dans le cas présent, si l'on élimine z entre l'équation (492) et l'équation $z = \gamma$, qui est celle d'un plan parallèle au plan des x, y, on trouve effectivement que la section parallèle au plan des x, y est un cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2(c^2 - \gamma^2)}{c^2}.$$

598. L'ellipsoïde porte le nom d'*ellipsoïde allongé*, lorsque la révolution se fait autour du grand axe, et d'*ellipsoïde aplati*, lorsque la révolution se fait autour du petit axe.

599. Enfin, si les trois axes sont égaux, l'équation (489) de l'ellipsoïde se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Il est facile de reconnaître, dans cette équation, celle de la sphère (art. 584). Dans ce cas les demi-axes a, b, c étant égaux, l'équation (490) de la section qui passe par l'axe des z (art. 595) devient

$$r^2 + z^2 = a^2;$$

et comme elle est celle d'un cercle dont le rayon est a, il en résulte que la surface peut être décrite par une demi-circonférence qui tournerait autour de son diamètre; ce qui montre, d'une seconde manière, que la surface est une sphère.

600. On peut trouver à priori la surface de l'ellipsoïde de révolution autour de l'un des axes de la manière suivante :

Fig. 208. Soient x, y, z (*fig.* 208) les coordonnées AP, PQ, QM d'un point M pris arbitrairement sur l'ellipsoïde de révolution.

Par ce point M et par l'axe des z, qu'on suppose être l'axe de révolution, menons un plan qui coupera l'ellipsoïde suivant DME. La courbe DME, située dans le plan sécant, étant rapportée aux axes 2 AE, 2 AD, si nous représentons les coordonnées AQ et QM par r et par z, comme cette courbe DME est une ellipse, il y aura (art. 262) entre les coordonnées r et z la relation suivante :

$$AD^2 . r^2 + AE^2 . z^2 = AD^2 . AE^2 ;$$

et, en mettant pour r^2 sa valeur $x^2 + y^2$, donnée par la propriété du triangle rectangle APQ situé dans le plan des x, y, on aura

$$AD^2 (x^2 + y^2) + AE^2 . z^2 = AD^2 . AE^2 :$$

or, l'ellipsoïde étant de révolution, on a

$$AE = AB.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, et nommant AB, a, AD, c, nous aurons pour l'équation de l'ellipsoïde de révolution

$$c^2 (x^2 + y^2) + a^2 z^2 = a^2 c^2.$$

601. Lorsque l'un des coefficients L, M, N de l'équation (483) est nul, et qu'on a, par exemple, $N = 0$, cette équation se réduit à celle d'une ellipse représentée par

$$Lx^2 + My^2 = P. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (493)$$

Tout point de la surface sera donc assujetti à avoir son ordonnée z sur l'un des points d'une ellipse située sur le plan des x, y, et dont x et y seront les coordonnées. Pourvu que cette condition soit remplie, z sera arbitraire; par conséquent, en élevant de tous les points de cette ellipse des ordonnées z, qui passeront par tous les degrés de grandeurs, ces ordonnées appartiendront toujours à la surface; cette surface sera donc un cylindre.

602. Si $L = M$, la base de ce cylindre est un cercle, puisqu'alors l'équation (493) devient

$$x^2 + y^2 = \frac{P}{M}.$$

603. Enfin, si l'on a

$$L = 0 \quad \text{et} \quad N = 0,$$

l'équation (493) se réduit à $My^2 = P$, et donne

$$y = \pm \sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Or, nous avons vu (art. 565) que l'équation $y = const.$ est celle d'un plan perpendiculaire à l'axe des y, qui, par conséquent, est parallèle au plan des y, z; donc l'équation

$$y = \pm \sqrt{\frac{P}{M}}$$

appartient à deux plans perpendiculaires à l'axe des y, dont l'un couperait cet axe, et l'autre son prolongement à des distances de l'origine représentées par $\sqrt{\frac{P}{M}}$.

CHAPITRE IX.

De l'hyperboloïde à une nappe.

604. Étant donnés, comme dans l'ellipsoïde, trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, l'hyperboloïde à une nappe est une courbe qui jouit des propriétés suivantes :

1° *Un seul des trois axes coordonnés ne rencontre pas la surface ; 2° toutes les sections perpendiculaires à cet axe sont des ellipses ; 3° ces ellipses ont leurs centres situés sur cet axe, et leurs axes principaux parallèles aux deux autres axes coordonnés ; 4° les deux sections principales menées par l'axe qui ne rencontre pas la surface, sont des hyperboles dont l'axe principal imaginaire est celui qui leur est commun, et dont le centre est à l'origine.*

Fig. 209. Prenons (*fig.* 209) l'axe des z pour celui qui ne rencontre pas la surface ; on voit, d'après la quatrième condition, que les hyperboles EBE′, DCD′, données par les sections des plans des x, z et des y, z, ont des équations des formes suivantes

$$c^2x^2 - a^2z^2 = a^2c^2, \quad c^2y^2 - b^2z^2 = b^2c^2. \quad . \quad . \quad (494)$$

Fig. 209. En considérant un point M de la surface (*fig.* 209), dont la coordonnée z soit représentée par QM = AO, et en menant par le point O un plan parallèle au plan des x, y, l'intersection de la surface, par ce plan sera l'ellipse MENF ; les carrés des demi-axes principaux de cette ellipse seront (comme dans l'art. 586) les valeurs que prendront x^2 et y^2 dans les équations (494) pour une même ordonnée AO $= z$; on aura donc

$$OG^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + z^2), \quad OE^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 + z^2).$$

Les ordonnées x et y devant appartenir à une ellipse qui aurait OG et OE pour ses demi-diamètres (art. 586), il existera

(art. 262) entre ces quantités la relation

$$OG^2x^2 + OE^2y^2 = OG^2 \times OE^2,$$

et, en divisant par le second membre,

$$\frac{x^2}{OE^2} + \frac{y^2}{OG^2} = 1;$$

mettant dans cette équation les valeurs de OE^2 et de OG^2, et chassant les dénominateurs, on trouvera

$b^2c^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$, *équation de l'hyperboloïde à une nappe.*

Reproduisant ici la remarque de l'article 587, par laquelle il est constaté que les constantes qui entrent dans cette équation étant des produits des carrés sont nécessairement positives, nous devons regarder comme telles les quantités L, M, N, P, qui les remplaceront, dans cette équation plus simple,

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = P. \quad \ldots\ldots (495)$$

En coupant cette surface par les plans parallèles aux trois plans coordonnés, et en nommant α, 6, γ les valeurs des variables x, y, z, lorsqu'elles deviennent constantes, on aura

$My^2 - Nz^2 = P - L\alpha^2 \ldots (496)$, *sect. parallèle au plan des y, z,*
$Lx^2 - Nz^2 = P - M6^2 \ldots (497)$, *sect. parallèle au plan des x, z,*
$Lx^2 + My^2 = P + N\gamma^2 \ldots (498)$, *sect. parallèle au plan des x, y.*

Les équations (496) et (497) appartiennent à des hyperboles qui, lorsqu'on fait, dans la première, $\alpha = 0$, et ensuite $6 = 0$, dans la seconde, deviennent les sections principales formées par les plans des y, z et des x, z.

608. Les équations de ces sections sont donc

$$My^2 - Nz^2 = P, \quad \ldots\ldots (499)$$

$$Lx^2 - Nz^2 = P; \quad \ldots\ldots (500)$$

l'équation (500) nous donne

$$z^2 = \frac{L}{N}\left(x^2 - \frac{P}{L}\right);$$

lorsqu'on y fait $x = 0$, on trouve z imaginaire; mais lorsqu'on y fait $z = 0$, on trouve

$$x = \pm\sqrt{\frac{P}{L}}$$ *pour l'abscisse de la plus petite abscisse.*

Toute valeur de x plus grande, prise positivement ou négativement, correspondra à une ordonnée réelle; donc la section faite par le plan des x, z a la forme que nous lui donnons (*fig.* 209).

Fig. 209.

On trouverait de même que dans la section faite par le plan des y, z, l'axe des z ne rencontre pas la courbe.

606. L'équation (498) de la section parallèle au plan des x, y est celle d'une ellipse dont les demi-axes principaux se trouvent, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$ dans cette équation, et l'on obtient

$$\frac{P + N\gamma^2}{M}, \quad \frac{P + N\gamma^2}{L}.$$

La plus petite valeur qu'on puisse donner à ces demi-axes est lorsqu'on fait $\gamma = 0$; dans ce cas, le plan sécant se confond avec le plan des x, y; mais en reculant le plan parallèlement à lui-même, soit au-dessus, soit au-dessous du plan des x, y, la valeur de γ^2 augmentera continuellement; par conséquent l'ellipse qui forme la section sera d'autant plus grande que le plan sécant s'écartera davantage du plan des x, y.

607. Pour avoir les points où les axes coordonnés peuvent être coupés par la courbe, on fera successivement, dans l'équation (495),

$$z = 0 \text{ et } y = 0; \quad z = 0 \text{ et } x = 0; \quad x = 0 \text{ et } y = 0;$$

et l'on trouvera

$$x = \pm\sqrt{\frac{P}{L}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{P}{M}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{P}{N}}\sqrt{-1};$$

l'axe des z, à cause de la racine imaginaire qui entre dans cette dernière équation, est donc le seul qui ne soit pas coupé par la courbe, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit (art. 602).

Si l'on fait

$$\sqrt{\frac{P}{L}} = a, \quad \sqrt{\frac{P}{M}} = b, \quad \sqrt{\frac{P}{N}} = c,$$

et qu'au moyen de ces expressions on élimine L, M, N de l'équation (495) de la surface, en opérant comme dans l'art. 593, on retombera sur l'équation

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2. \quad . \quad . \quad (501),$$ *équation de l'hyperboloïde à une nappe.*

608. Pour obtenir la section de cette surface par un plan qui passe par l'axe des z, l'équation de ce plan étant $y = x \tang \varphi$, il faudra éliminer y entre cette équation et la précédente, et l'on obtiendra

$$(b^2c^2 + a^2c^2 \tang^2 \varphi)x^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2;$$

mettant pour x la valeur $r \cos \varphi$ (art. 594), cette équation deviendra

$$(b^2c^2 \cos^2 \varphi + a^2c^2 \sin^2 \varphi)r^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

équation d'une hyperbole qui, lorsque $a = b$, se réduit à

$$c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (502)$$

Dans ce cas, toutes les sections qui passent par l'axe, étant indépendantes de l'angle φ, sont égales, et l'hyperboloïde est alors une surface de révolution.

609. L'hyperbole, dont une partie est représentée par MAM'
Fig. 210. (*fig.* 210), étant le lieu de l'équation $c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2$, a son axe des z dirigé suivant CZ. Si l'on fait tourner MAM' autour de cet axe, la courbe MAM' décrira un hyperboloïde de révolution; toutes les droites, telles que mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., décriront des cercles qui seront autant de sections de la surface de révolution.

D'après ce qui précède, si l'on fait $a = b$ dans l'équation (501), on trouvera, pour celle de l'hyperboloïde de révolution à une nappe,

$$c^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = a^2c^2.$$

610. Cette équation peut encore se trouver, à priori, en opérant comme dans l'art. **600**.

En général, toute surface de révolution s'obtiendra par le même procédé; car, dans ces sortes de surfaces, si l'on nomme r
Fig. 207. et z les coordonnées AQ et QM (*fig.* 207) de la génératrice, en résolvant l'équation de cette génératrice DC, on pourra obtenir pour z une certaine fonction de r, que nous représenterons par fr, de sorte que nous aurons

$$z = fr.$$

Substituant dans cette équation la valeur $\sqrt{x^2 + y^2}$ de r, on aura

$$z = f(x^2 + y^2) \ldots \quad (503),$$ *pour l'équation générale des surfaces de révolution.*

Ce qui précède nous indique que, lorsque l'équation de la génératrice est donnée, il faut changer r^2 en $x^2 + y^2$ pour obtenir l'équation de la surface: par exemple, dans le cas de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, la génératrice étant une hyperbole dans laquelle l'axe z de révolution ne rencontre pas la courbe, on aura, pour l'équation de cette génératrice,

$$c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2,$$

ou plutôt $$z = \pm \frac{c}{a}\sqrt{r^2 - a^2};$$

on mettra, à la place de r^2, la valeur $x^2 + y^2$, et l'on obtiendra l'équation de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

611. Lorsque l'un des coefficients qui affectent les variables se trouve nul dans l'équation (495), et qu'on a, par exemple, $N = 0$, cette équation se réduit à

$$Lx^2 + My^2 = P.$$

Il est facile de prouver, comme dans l'art. **601**, que la surface devient alors celle d'un cylindre (*) qui aurait pour base l'ellipse dont l'équation est

$$Lx^2 + My^2 = P.$$

Si, au contraire, c'est L ou M qui est nul dans l'équation (495), cette surface cylindrique a pour base une hyperbole.

612. Quand le coefficient nul est P, l'équation (495) se réduit à

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (504)$$

Je vais démontrer que la surface qui est donnée par cette équation jouit de cette propriété, que toute droite, menée par l'origine à l'un de ses points, se confond dans toute son étendue avec cette surface qui, par conséquent, est du genre des surfaces coniques (**).

Pour cet effet, les équations d'une droite qui passe par l'origine étant $x = az$, $y = bz$, supposons que l'inclinaison de

(*) Une surface cylindrique est une surface courbe engendrée par le mouvement d'une droite qui reste constamment parallèle à une droite donnée.

(**) Une surface conique est une surface engendrée par le mouvement d'une droite qui passe toujours par un même point.

cette droite soit déterminée par la condition qu'elle ait un point x', y', z', commun avec la surface, ces coordonnées satisferont donc à la fois à l'équation de la ligne droite et à celle de la surface, de sorte qu'on aura

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad Lx'^2 + My'^2 - Nz'^2 = 0.$$

Substituons, dans la troisième équation, les valeurs de x' et de y' données par les premières, après avoir divisé par z'^2, on obtiendra

$$La^2 + Mb^2 - N = 0,$$

d'où l'on tirera

$$b = \pm\sqrt{\frac{N - La^2}{M}};$$

mettant cette valeur de b dans l'une des équations de la droite, on aura, pour les équations de cette droite,

$$x = az, \quad y = \pm\sqrt{\frac{N - La^2}{M}}\,z \quad \ldots \quad (505)$$

Ces valeurs de x et de y appartenant à un point quelconque de la droite, si on les substitue dans l'équation (504) et qu'elles y satisfassent, on pourra affirmer que tout point x, y, z, de cette droite, est situé sur la surface dont (504) est l'équation : or c'est ce qui a lieu ; car en faisant la substitution indiquée, on tombe sur une équation identique.

613. Si l'on coupe cette surface conique par un plan parallèle au plan des x, y, l'équation de ce plan parallèle étant $z = \gamma$, il faudra éliminer z entre cette équation et celle de la surface conique, pour obtenir l'équation de la section qui sera, par conséquent,

$$Lx^2 + My^2 = N\gamma^2.$$

On peut reconnaître, dans cette équation, celle d'une ellipse qui est indépendante du signe de γ ; par conséquent, les sections

faites à des distances égales au-dessus et au-dessous du plan des x, y, sont des ellipses équivalentes, et comme ces ellipses vont toujours en croissant depuis zéro jusqu'à l'infini, à mesure qu'on écarte le plan sécant du plan des x, y, on voit que cette surface conique se compose de deux cônes elliptiques opposés par le sommet.

614. Cette surface conique est asymptotique à la surface courbe, c'est-à-dire ne pourrait l'atteindre qu'en supposant γ infini.

Pour démontrer cette propriété, faisons $z = \gamma$ dans les équations (495) et (504), nous aurons, pour les équations des sections elliptiques faites par le même plan,

$$Lx^2 + My^2 = P + N\gamma^2, \quad Lx^2 + My^2 = N\gamma^2. \quad . \quad . \quad . \quad (506)$$

Or, si un point était commun à ces deux ellipses (*), il faudrait que les coordonnées x et y de ce point satisfissent à ces deux équations, et que, dans ce cas, leurs premiers membres fussent égaux, ce qui nécessiterait l'égalité des seconds, d'où l'on tirerait l'équation

$$P + N\gamma^2 = N\gamma^2, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{N\gamma^2} + 1 = 1,$$

équation qui ne cesse d'être absurde que lorsque γ est infini.

615. Enfin, si dans l'équation (504) on avait $M = L$, la surface conique asymptotique serait un double cône à base circulaire.

(*) Si en égalant successivement x et y à zéro, on détermine les axes principaux de ces ellipses, et ensuite leurs surfaces au moyen de la formule πab (art. 528), on trouvera que la différence de ces surfaces est égale à

$$\pi \frac{P}{\sqrt{ML}},$$

et que par conséquent elle est indépendante de γ : or, les surfaces de ces ellipses s'augmentant à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan des x, y, pour que l'excès de la plus grande sur la plus petite reste le même, il faut que la courbe intérieure s'approche de l'autre.

CHAPITRE X.

De l'hyperboloïde à deux nappes.

616. Ayant établi, comme ci-dessus, trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, l'équation de l'hyperboloïde à deux nappes se détermine en satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Un seul des trois axes coordonnés rencontre la surface;* 2° *toutes les sections perpendiculaires à cet axe sont des ellipses;* 3° *ces ellipses ont leurs centres situés sur cet axe, et leurs axes principaux parallèles aux deux autres axes coordonnés;* 4° *les sections faites par les deux autres plans coordonnés, et qui, par leur intersection, forment l'axe qui rencontre seul la surface, sont des hyperboles dont l'axe principal réel est celui qui leur est commun, et dont le centre est à l'origine* (*).

Fig. 211. Ayant pris (*fig.* 211) l'axe des z pour celui qui rencontre la surface, les hyperboles FBE, GBH données par les sections des plans des z, x et des z, y, auront, d'après la quatrième condition, des équations des formes suivantes

$$a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2, \quad b^2z^2 - c^2y^2 = b^2c^2, \quad . \quad . \quad (507)$$

car l'axe des z étant, par hypothèse, celui qui rencontre la surface, il faut qu'en faisant $x = 0$ et $y = 0$ dans les équations (507), on trouve des valeurs réelles pour z.

Fig. 211. Cela posé, soit un point M de la surface courbe (*fig.* 211) qui ait pour coordonnées $AP = x$, $PQ = y$, $MQ = z$; l'intersection de cette surface par un plan parallèle à celui des x, y sera

(*) On voit que l'équation de l'hyperboloïde à deux nappes s'obtient en modifiant ainsi l'énoncé de l'art. 604 : *L'axe qui ne rencontre pas la surface dans l'hyperboloïde à une nappe est précisément le seul qui la rencontre dans l'hyperboloïde à deux nappes.*

l'ellipse FME qui aura pour carrés de ses demi-axes les valeurs que prendront x^2 et y^2 dans les équations (507) pour une même ordonnée z; ces équations donneront donc

$$OE^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2), \quad OG^2 = \frac{b^2}{c^2}(z^2 - c^2) \ldots \quad (508)$$

Mais ces coordonnées x et y appartenant aussi à une ellipse dont les demi-axes seraient OE et OG, cette ellipse aura pour équation

$$OG^2 \times x^2 + OE^2 \times y^2 = OG^2 \times OE^2,$$

et, en divisant par $OG^2 \times OE^2$,

$$\frac{x^2}{OE^2} + \frac{y^2}{OG^2} = 1.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de OE^2 et de OG^2 tirées des équations (508), on trouvera

$$\frac{x^2}{\frac{b^2}{c^2}(z^2 - c^2)} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2)} = 1,$$

ou

$$\frac{c^2 x^2}{b^2(z^2 - c^2)} + \frac{c^2 y^2}{a^2(z^2 - c^2)} = 1;$$

faisant évanouir le facteur $z^2 - c^2$, il restera

$$\frac{c^2 x^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{a^2} = z^2 - c^2.$$

Multipliant par $a^2 b^2$, et transposant, on trouvera enfin

$$a^2 b^2 z^2 - a^2 c^2 x^2 - b^2 c^2 y^2 = a^2 b^2 c^2 \ldots \quad (509),$$ *équation de l'hyperboloïde à deux nappes.*

Remarquant, comme dans les art. 587 et 603, que les termes constants étant essentiellement positifs, cette équation, écrite ainsi,

$$Nz^2 - My^2 - Lx^2 = P, \ldots\ldots \quad (510)$$

n'admettra que des quantités positives pour les coefficients N, M, L, P.

En faisant successivement $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, on trouve, pour les équations des sections parallèles aux plans coordonnés,

$Nz^2 - My^2 = P + L\alpha^2 \ldots (511)$, *sect. parallèle au plan des* y, z,

$Nz^2 - Lx^2 = P + M\beta^2 \ldots (512)$, *sect. parallèle au plan des* x, z,

$My^2 + Lx^2 = N\gamma^2 - P \ldots (513)$, *sect. parallèle au plan des* x, y.

Les équations (511) et (512) appartiennent à des hyperboles; l'équation (513) est celle d'une ellipse qui cesse d'exister lorsque $N\gamma^2 - P$ est une quantité négative. Dans ce cas, on a

$$N\gamma^2 < P \quad \text{ou} \quad \gamma^2 < \frac{P}{N},$$

et par conséquent

$$\gamma < \sqrt{\frac{P}{N}}.$$

Mais, dès qu'on prend γ plus grand que $\sqrt{\frac{P}{N}}$, le second terme de l'équation (513) s'accroissant, fera aussi augmenter les axes de cette ellipse; et comme γ n'entre qu'au carré dans l'équation (513), en faisant γ négatif, on trouvera du côté des z négatifs une seconde surface absolument semblable à la première. Il résulte de ce qui précède, qu'en menant à la distance $\sqrt{\frac{P}{N}}$, soit au-dessus, soit au-dessous du plan des x, y, deux plans parallèles, la surface ne sera point comprise entre ces plans; mais qu'en menant des plans parallèles très-rapprochés, à mesure que l'on s'écartera du plan des x, y dans le sens des z positifs ou dans celui des z négatifs, on aura une suite de courbes elliptiques parallèles au plan des x, y, qui croîtront par degrés insensibles depuis zéro jusqu'à l'infini.

617. Puisque la surface n'est pas rencontrée par le plan des x, y (*), elle ne pourra donc l'être par les axes des x et des y qui sont renfermés dans ce plan; mais il n'en sera pas de même à l'égard de l'axe des z.

En effet, si l'on égale successivement à zéro deux des variables de l'équation (510), en faisant

$$z=0,\ y=0,\quad \text{on trouvera}\quad x=\pm\sqrt{\frac{P}{L}}\sqrt{-1},$$

$$z=0,\ x=0,\quad \ldots\ldots\ldots\quad y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}\sqrt{-1},$$

$$x=0,\ y=0,\quad \ldots\ldots\ldots\quad z=\pm\sqrt{\frac{P}{N}};$$

cette dernière expression est effectivement la seule qui soit réelle. En faisant donc $\sqrt{\frac{P}{N}}=c$, $2c$ sera le seul axe réel de la surface; mais, par analogie, nous supposerons $\sqrt{\frac{P}{L}}=a$, $\sqrt{\frac{P}{M}}=b$, ce qui d'ailleurs est possible, puisque ces expressions sont des constantes de l'équation de la surface, que nous remplaçons par d'autres constantes. En substituant, dans l'équation (510), les valeurs de L, de M et de N, tirées de ces équations, on retombe sur l'équation (509)

$$a^2b^2z^2-a^2c^2y^2-b^2c^2x^2=a^2b^2c^2\ldots\ (514),$$ *équation de l'hyperboloïde à deux nappes.*

(*) Cela devient encore manifeste en considérant l'équation

$$My^2+Lx^2=-P,$$

qui est celle de la section de la surface par le plan des x, y, donne des valeurs imaginaires par les demi-axes principaux.

618. On démontrerait, comme dans l'art. 594, que la section de la surface, par un plan qui passe par l'axe des z, est une hyperbole, et, au moyen de l'équation de cette section, on trouverait, comme dans l'art. 596, que la condition nécessaire pour que la surface soit de révolution est l'égalité des coefficients a et b.

619. Au reste, on peut trouver immédiatement cette condition d'après ce que nous avons dit (art. 596) que, dans ce cas, z devait être une fonction de $x^2 + y^2$, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les coefficients de x^2 et de y^2 deviennent égaux : dans ce cas, l'équation (514) se réduit à

$$a^2z^2 - c^2(x^2 + y^2) = a^2c^2,$$ *équation de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes.*

620. Cette équation pourrait encore se trouver, comme dans l'art. 610, en mettant $x^2 + y^2$ à la place de r^2, dans l'équation de la section qui passe par l'axe des z, qui est de la forme $a^2z^2 - c^2r^2 = a^2c^2$.

621. Lorsque dans l'équation (510) on a

$$M = 0 \text{ ou } L = 0,$$

l'équation de la surface se réduit à celle d'une surface cylindrique dont la base est une hyperbole, comme on peut s'en convaincre par les mêmes raisonnements que nous avons employés (art. 601).

Quand le seul coefficient N de l'equation (510) est nul, la surface cesse d'exister, puisque son équation est alors absurde.

622. Enfin, quand $P = 0$, l'équation

$$Nz^2 - My^2 - Nx^2 = 0,$$

devient celle d'une surface conique asymptotique à l'hyperbole à deux nappes; cela se démontrerait encore comme dans l'art. 611.

CHAPITRE XI.

Des paraboloïdes.

623. Déterminons maintenant les surfaces courbes qui jouissent de ces propriétés :

1°. *Deux des plans coordonnés donnent pour sections des paraboles qui ont pour axes la commune section de ces plans.*

2°. *Toutes les sections perpendiculaires à cet axe sont des ellipses ou des hyperboles.*

Les sections faites par deux plans coordonnés ne pouvant se rencontrer que suivant une droite qui est l'un des axes coordonnés, cet axe, que nous prendrons pour celui des z, sera l'axe principal des deux paraboles dont, par conséquent, nous représenterons les équations par

$$x^2 = pz, \quad y^2 = nz.$$

Si l'on prend $AO = z$ (*fig.* 212), la première de ces équations nous donnera Fig. 212.

$$OD^2 = pz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (515)$$

et, en vertu de la seconde, nous aurons

$$OG^2 = nz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (516)$$

Les coordonnées x et y devant satisfaire, dans la première hypothèse, à une ellipse dont les demi-axes sont OD et OG, on aura (art. **262**)

$$OG^2 \times x^2 + OD^2 \times y^2 = OD^2 \times OG^2,$$

ou

$$pzx^2 + nzy^2 = pnz^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (517)$$

et, dans la seconde hypothèse, ces coordonnées satisfaisant

à l'hyperbole (292), étant liées par l'équation, on aura

$$OG^2 \times x^2 - OD^2 \times y^2 = OG^2 \times OD^2,$$

ou

$$pzx^2 - nzy^2 = pnz^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (518)$$

624. OD^2 et OG^2 étant des carrés, sont essentiellement positifs; les équations (215) et (216) montrent qu'il en sera de même de pz et de nz, ainsi que de leur produit pnz^2.

Divisons les équations (517) et (518) par la quantité positive pnz^2, nous obtiendrons

$$\frac{1}{n}x^2 + \frac{1}{p}y^2 = z, \quad \frac{1}{n}x^2 - \frac{1}{p}y^2 = z;$$

multiplions tous les termes de ces équations par une quantité arbitraire positive N, nous aurons

$$\frac{N}{n}x^2 + \frac{N}{p}y^2 = Nz, \quad \frac{N}{n}x^2 - \frac{N}{p} = Nz;$$

et, en faisant

$$\frac{N}{n} = L, \quad \frac{N}{p} = M,$$

nous trouverons enfin

$$Lx^2 + My^2 = Nz, \quad Lx^2 - My^2 = Nz. \quad \ldots \quad (519)$$

625. La première de ces équations est celle du *paraboloïde elliptique*, et la seconde appartient au *paraboloïde hyperbolique*.

Occupons-nous d'abord du paraboloïde elliptique, et démontrons que son équation satisfait aux conditions du problème. Pour cet effet, soient α, β, γ les valeurs que prennent les variables x, y, z lorsqu'à des distances α, β, γ on fait passer des plans parallèles à ceux des y, z, des x, z et des x, y; si entre l'équation

$$Lx^2 + My^2 = Nz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (520)$$

du paraboloïde elliptique et les équations

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

on élimine successivement x, y, z, on trouvera.

$$My^2 = Nz - L\alpha^2, \text{ section parallèle au plan des } y, z,$$

$$Lx^2 = Nz - M\beta^2, \text{ section parallèle au plan des } x, z,$$

$$Lx^2 + My^2 = N\gamma, \text{ section parallèle au plan des } x, y.$$

On voit donc que les sections faites par des plans parallèles aux plans des z, y et des z, x sont des paraboles, et que la section faite par le plan parallèle au plan des x, y est une ellipse.

Le plan des x, y ne rencontre pas la surface, car lorsque $z = 0$, l'équation (520) se réduit à

$$Lx^2 + My^2 = 0,$$

équation absurde, puisque L et M étant essentiellement positifs (art. 624), la destruction des termes du premier membre ne peut s'opérer.

L'équation de la section parallèle au plan des x, y étant mise sous cette forme

$$\frac{x^2}{\left(\frac{N\gamma}{L}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{N\gamma}{M}\right)} = 1;$$

en multipliant tous les termes par le produit des dénominateurs, nous donne

$$\frac{N\gamma}{M}x^2 + \frac{N\gamma}{L}y^2 = \frac{N\gamma}{L} \times \frac{N\gamma}{M},$$

et l'on reconnaît, dans cette équation, celle d'une ellipse dont les carrés des demi-axes sont

$$\frac{N\gamma}{L} \quad \text{et} \quad \frac{N\gamma}{M};$$

car il est visible que ces expressions s'accroissent avec γ; d'où il suit que ces ellipses vont toujours en s'agrandissant à mesure que le plan sécant s'écarte du plan des x, y.

Enfin, si le plan sécant qui passe au-dessous de celui des x, y, z devient négatif, il donne lieu à une surface courbe située au-dessous de ce plan et absolument semblable à celle qui est au-dessus.

626. Les ellipses formées par les sections parallèles au plan des x, y auront leurs centres sur l'axe des z; car l'équation

$$Lx^2 + My^2 = Nz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (521)$$

qui les renferme toutes, est rapportée à une origine qui est le centre de la courbe; et comme cette origine est le point où x et y sont nuls, elle sera donc sur l'axe des z.

627. Toutes les sections qui passent par l'axe des z sont des paraboles; car si l'on élimine y entre l'équation (519) de la surface

$$My^2 + Lx^2 = Nz,$$

Fig. 206. et l'équation $y = \tang \varphi \,.\, x$ (*fig.* 206), qui est celle du plan mené par l'axe des z, équation qui se réduit à celle de sa trace, nous trouverons

$$\frac{Nz - Lx^2}{M} = \tang^2 \varphi\, x^2; \quad \ldots\ldots \quad (522)$$

Fig. 206. et comme, en désignant AC par r (*fig.* 206), les variables x et φ dépendent l'une de l'autre, étant liées entre elles par l'équation

$$x = r \cos \varphi,$$

si nous remplaçons x par cette valeur dans l'équation (522), nous trouverons

$$Nz - Lr^2 \cos^2 \varphi = M \tang^2 \varphi\, r^2 \cos^2 \varphi,$$

et, en observant que $\tang \varphi \cos \varphi$, d'après l'équation (2), équivaut à $\sin \varphi$, nous aurons

$$Nz = r^2 \sin^2 \varphi + \frac{L}{M} r^2 \cos^2 \varphi,$$

ou plutôt $$Nz = r^2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{L}{M} \cos^2 \varphi\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (523)$$

d'où nous conclurons que l'équation de la section qui passe par l'axe des z est celle d'une parabole.

628. Lorsque $M = L$, la quantité qui est entre parenthèses dans cette équation se réduisant à $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$, dont la valeur est l'unité, l'équation (523) devient

$$Nz = r^2,$$

et se trouvant indépendante de l'angle φ, il en résulte que, dans ce cas, toutes les sections menées par l'axe des z sont égales et que la surface peut être obtenue de suite en faisant tourner l'arc de la parabole DC (*fig.* 204) autour de l'axe des z.

Le paraboloïde elliptique devient alors une surface de révolution, et l'équation de la section parallèle au plan des x, y, se réduisant à

$$x^2 + y^2 = \frac{N\gamma}{M},$$

se changera en celle du cercle.

On voit d'ailleurs que la condition exigée (art. 595 et 596) pour que la surface soit alors une surface de révolution est remplie, puisque l'hypothèse de $L = M$ rend z une fonction de $x^2 + y^2$.

Si dans l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{N}{M} z,$$

on fait $$\frac{N}{M} = 2p,$$

on aura

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$ *équation du paraboloïde elliptique de révolution.*

629. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$Lx^2 - My^2 = Nz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (524)$$

qui est la seconde des équations (519), qu'on désigne (art. 525) sous le nom de *paraboloïde hyperbolique*.

Si l'on coupe cette surface par des plans parallèles aux plans coordonnés, en égalant successivement chaque variable à une constante, on trouve pour les sections faites par ces plans

$$Lx^2 = Nz + M\beta^2 \ldots (525),$$ *sect. parall. au plan des* x, z;

$$My^2 = -Nz + L\alpha^2 \ldots (526),$$ *sect. parall. au plan des* y, z;

$$Lx^2 - My^2 = N\gamma \ldots (527),$$ *sect. parall. au plan des* x, y.

Les équations (525) et (526) appartiennent à des paraboles, et l'équation (527) est celle d'une hyperbole.

630. Si dans les équations (525) et (526) on fait $\beta = 0$ dans l'une, et ensuite $\alpha = 0$ dans l'autre, on trouve que les traces sur les plans des x, z et des y, z ont pour équations

$$Lx^2 = Nz \ldots (528),$$ *section faite par le plan des* x, z;

$$My^2 = -Nz \ldots (529),$$ *section faite par le plan des* y, z.

La première de ces équations est celle d'une parabole qui a ses abscisses sur l'axe des z, et la seconde est celle d'une parabole qui a pour axe des abscisses le prolongement de l'axe des z. Ces paraboles sont situées dans les plans des x, z et des y, z, qui sont perpendiculaires entre eux.

Fig. 213. **631.** Soit OA (*fig.* 213) une valeur de z, dans la parabole, qui appartient à l'équation (528), on obtiendra

$$x \quad \text{ou} \quad OE = \pm\sqrt{\frac{N}{L} \cdot AO}.$$

Si, dans l'hyperbole de l'équation (527), on fait $\gamma = 0$, la section parallèle au plan des x, y aura pour équation

$$Lx^2 - My^2 = N.AO.$$

Le demi-axe réel de cette hyperbole sera la valeur de x qui

répond à $y = 0$ (*), et l'on a OE et OE′ pour ces valeurs de x

$$x = \pm \sqrt{\frac{N}{L} \cdot AO} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (530)$$

OE et OE′ étant les mêmes dans les deux courbes, concluons que les points E et E′ leur sont communs, et qu'en reculant le plan sécant dans la surface, la partie des z positifs se compose d'une suite d'hyperboles qui sont parallèles au plan des x, y, et qui ont leurs sommets sur deux des points de la parabole EAE′.

632. A mesure que le plan sécant s'approche du plan des x, y en lui restant parallèle, l'axe réel EE′ de l'hyperbole RSR′S′ diminue jusqu'à ce que le plan sécant se confonde avec le plan des x, y; dans ce cas, l'équation de la surface devient

$$My^2 = Lx^2,$$

et donnant $$y = \pm x \sqrt{\frac{L}{M}},$$

la section se réduit au système de deux lignes droites.

633. Si le plan sécant passe au-dessous du plan des x, y, le signe de γ change, et l'équation de la section parallèle au plan des x, y devient

$$Lx^2 - My^2 = -N\gamma,$$

ou plutôt $$My^2 - Lx^2 = N\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (531)$$

634. En comparant cette dernière équation à l'équation (527), on voit que l'axe réel EE′ de l'hyperbole RSR′S′, située au-dessus du plan des x, y, est parallèle à l'axe des x, tandis

(*) En effet, on tire de l'équation (530)

$$\frac{Lx^2}{N.AO} - \frac{My^2}{N.AO} = 1;$$

et, en divisant par le produit des coefficients renversés de x^2 et de y^2, on a

$$\frac{N.AO}{M} x^2 - \frac{N.AO}{L} y^2 = \frac{N.AO}{L} \times \frac{N.AO}{M},$$

équation qui, étant de la forme de l'équation (192), nous conduit à l'équation (530).

que l'axe réel de l'hyperbole VTV'T' (*fig.* 213), situé au-dessous du plan des x, y, est parallèle à l'axe des y; par conséquent, si les plans sécants sont menés à égales distances du plan des x, y, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de ce plan, les équations (527) et (531) ne différeront que par le signe de γ; et les hyperboles RSR'S', VTV'T' jouiront de cette propriété, que le demi-axe réel de l'une sera égal à la constante qui multiplie $\sqrt{-1}$ dans l'expression du demi-axe imaginaire de l'autre.

635. On peut démontrer, comme dans l'art. **631**, que toutes les hyperboles situées au-dessous du plan des x, y parallèlement à ce plan, ont leurs sommets sur la parabole donnée par l'équation (529).

636. Si l'on fait passer un plan par l'axe des z, l'équation de ce plan sera

$$y = x \operatorname{tang}\varphi;$$

éliminant y entre cette équation et celle (524) de la surface, on aura, pour l'équation de la section faite par ce plan,

$$(L - M \operatorname{tang}^2\varphi)\, x^2 = Nz;$$

et, en faisant $x = r\cos\varphi$, elle deviendra

$$(L\cos^2\varphi - M\sin^2\varphi)\, r^2 = Nz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (532)$$

Fig. 214. équation d'une parabole MAM' (*fig.* 214) qui a son sommet à l'origine A où r est nul. Cette parabole, se prolongeant à l'infini, doit nécessairement rencontrer le plan qu'on mènerait par le point O parallèlement au plan des x, y : or, tout point de cette parabole appartenant à la surface, et l'hyperbole RSR'S' contenant tous les points de cette surface qui sont renfermés dans le plan parallèle au plan des x, y, mené par le point O, il suit de là que la parabole doit passer par deux points de l'hyperbole RSR'S'.

Pour déterminer ces points, faisons z=AO dans l'équation (532), nous trouverons

$$r = +\sqrt{\frac{N.AO}{L\cos^2\varphi - M\sin^2\varphi}} = AC,$$

et $$r = -\sqrt{\frac{N.AO}{L\cos^2\varphi - M\sin^2\varphi}} = AC'.$$

De l'égalité de ces valeurs de AC et de AC′, concluons que les points M et M′ de la parabole MAM′ sont situés symétriquement sur l'hyperbole, c'est-à-dire que l'arc EM = E′M′.

On peut donc concevoir le paraboloïde hyperbolique comme formée par une infinité de paraboles qui ont leurs sommets en A et qui coupent symétriquement les branches des hyperboles RSR′S′, VTV′T′.

637. Nous avons vu (art. 331 et 332) que les asymptotes de l'hyperbole forment, avec l'axe réel, des angles dont les tangentes trigonométriques, de signes contraires, sont égales au rapport du petit axe au grand axe de l'hyperbole. L'équation (531) de l'hyperbole RSR′S′ (*fig.* 215) donne, pour ces tangentes trigonométriques, Fig. 215.

$$\frac{L}{M} \quad \text{et} \quad -\frac{L}{M}.$$

Ces expressions étant indépendantes de γ, les asymptotes A′L′, A′H′ (*fig.* 215 de la section) feront entre elles le même angle que LAH. Donc les plans AL′, AH′, qui contiennent toutes les asymptotes des sections, seront asymptotiques à la surface.

Les surfaces du second ordre, dans lesquelles figure la parabole, ne se bornent pas au paraboloïde elliptique et au paraboloïde hyperbolique; aussi allons-nous examiner celles qui sont comprises dans l'équation

$$Az^2 + Hy + Kx = 0;$$

laissant Az^2 positif dans le second membre, on obtient

$$-Hy - Kx = Az^2.$$

Quoique les deux termes du premier soient affectés du signe négatif, ils deviennent positifs si les deux facteurs qui les composent se trouvent de signes contraires : ainsi, en ne pré-

jugeant rien sur la nature de ces termes, nous nous contenterons de remarquer que les deux termes du premier membre ne peuvent être à la fois négatifs; car le second membre étant, par hypothèse, positif, l'équation serait absurde. Les deux premiers termes ne peuvent donc exprimer qu'une différence ou qu'une somme de quantités positives; par conséquent, nous n'aurons à discuter que ces deux équations

$$My - Nx = Az^2, \quad \ldots\ldots \quad (533)$$

$$My + Nx = Az^2. \quad \ldots\ldots \quad (534)$$

638. Occupons-nous de la première; pour cet effet, si, dans l'équation (533), on fait $z = 0$, l'équation de la section sur le plan des x, y sera

$$My = Nx, \quad \ldots\ldots \quad (535)$$

et l'on voit qu'elle appartient à une ligne droite AL (*fig.* 216), qui passe par l'origine.

Si l'on fait ensuite $z = \gamma$ dans l'équation (533), on aura

$$y = \frac{Nx}{M} + \frac{A\gamma^2}{M}$$

pour l'équation de la section formée par un plan parallèle au
Fig. 216. plan des x, y. L'angle L'A'X' (*fig.* 216) que cette section A'L' fait avec la parallèle A' X' à l'axe des x, a la même tangente trigonométrique que l'angle LAX. Donc toutes les sections telles que A'L', formées par des plans parallèles à celui des x, y, sont parallèles, et la surface peut être engendrée par une droite ferait mouvoir parallèlement à elle-même, et par conséquent est une surface cylindrique.

Fig. 217. **639.** La section faite par un plan Z'A' Y' (*fig.* 217) parallèle au plan des y, z, est une parabole qui a pour équation

$$z^2 = \frac{My}{A} - \frac{N\alpha}{A}.$$

Si l'on fait

$$y = y' + \frac{N\alpha}{M}, \quad \ldots\ldots \quad (536)$$

l'équation de cette section deviendra

$$z^2 - \frac{My'}{A} = 0;$$

le sommet de la parabole sera donc au point où $y' = 0$. Dans ce cas, l'équation (536) se réduit à

$$y = \frac{N\alpha}{M}.$$

Cette valeur de y est précisément celle qu'on trouverait en faisant $x = \alpha$ dans l'équation (535) de la droite AL. Donc le sommet de cette parabole est situé sur la droite AL.

Ce que nous disons du plan Z'A'Y' pouvant s'appliquer à tout autre plan qui lui serait parallèle, il résulte de ce qui précède, que toutes les sections formées par les plans parallèles au plan des y, z sont des paraboles qui ont leurs sommets sur la droite AL.

640. Si l'on observe maintenant que toutes ces paraboles ont le même paramètre, on peut concevoir cette surface comme engendrée par une parabole MDN, qu'on ferait mouvoir parallèlement au plan des y, z, de telle manière que son sommet restât toujours sur la droite AL, et son axe dans le plan des x, y.

641. D'après la propriété que nous venons de reconnaître dans cette surface, on peut trouver son équation : car, soient $y' = ax$ l'équation de la droite AL (*fig.* 217), et $z^2 = 2py''$ l'équation de la parabole MDN; x, y, z représentant les coordonnées AA', A'Q, QM d'un point M, on a Fig 217.

$$MQ^2 = 2p.DQ, \quad DQ = A'Q - A'D,$$

ou

$$z^2 = 2p.DQ, \quad DQ = y - ax.$$

Éliminant DQ, on trouve

$$z^2 = 2py - 2apx.$$

642. Enfin, il est facile de reconnaître que l'équation (534) appartient à une surface de la même nature que celle que nous venons d'analyser; car en faisant $x = -x'$, c'est-à-dire en prenant l'axe des x' sur le prolongement de celui des x, on aura une équation de même forme que la précédente.

CHAPITRE XII.

De la transformation des coordonnées dans l'espace.

643. Les points d'une courbe étant rapportés à trois axes coordonnés AX, AY, AZ (*fig.* 218), proposons-nous de la rapporter à trois autres axes fixes AX′, AY′, AZ′. Prenons un point M sur la courbe, et soient $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, les anciennes coordonnées rapportées aux axes AX, AY, AZ; et $AP' = x'$, $P'Q' = y'$, $Q'M = z'$, les nouvelles coordonnées rapportées aux axes AX′, AY′, AZ′; menons par les points P′, Q′, M, des plans parallèles au plan des x, y, la coordonnée z sera coupée en trois parties comprises entre ces plans; il est évident que la première partie est égale à la projection de x' sur l'axe des z, et que la seconde est égale à la projection de y' sur l'axe des z, et la troisième à la projection de z' sur l'axe des z. Si nous nommons donc Z, Z′, Z″ les angles que les nouvelles coordonnées x', y', z' forment avec l'axe des z, nous aurons

$$z = x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''.$$

C'est, en général, que nous écrivons ces termes avec le signe positif, car il est évident qu'ils pourraient être négatifs si les cosinus appartenaient à des angles qui exigeassent des changements de signes.

Si nous appelons X, X′, X″ les angles que les nouvelles

coordonnées font avec l'axe AX, et Y, Y′, Y″ les angles qu'elles font avec l'axe AY, nous démontrerions de la même manière, les deux premières des trois équations suivantes, que nous joignons à celle que nous venons de trouver :

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X'', \\ y &= x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y'', \\ z &= x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''. \end{aligned}\right\} \ldots (537)$$

644. Si l'origine n'était pas la même, en appelant a, b, c les coordonnées de la nouvelle origine, on aurait évidemment

$$\begin{aligned} x &= x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X'' + a, \\ y &= x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y'' + b, \\ z &= x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z'' + c. \end{aligned}$$

Les anciens axes AX, AY, AZ étant rectangulaires et formant avec la nouvelle coordonnée x' des angles X, Y, Z, avec la nouvelle coordonnée y' des angles X′, Y′, Z′, et avec la nouvelle coordonnée z' des angles X″, Y″, Z″ ; on aura, d'après l'art. 556,

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z &= 1, \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' &= 1, \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' &= 1. \end{aligned}\right\} \ldots (538)$$

645. Il nous reste encore à considérer les angles que les nouvelles coordonnées forment entre elles : pour cet effet, soient

V l'angle des x' et des y',
U l'angle des y' et des z',
W l'angle des z' et des x'.

Puisque les nouveaux axes Ax' et Ay' sont deux droites qui forment respectivement des angles X, Y, Z et X′, Y′, Z′ avec les anciens axes, et que l'angle de ces droites est représenté par V, on aura, d'après l'art. 559, l'équation suivante :

$$\cos V = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z'.$$

Le nouvel axe Az' faisant avec les anciens des angles X'', Y'', Z'', nous pourrons déterminer de même les angles U et W que cette coordonnée z' fait avec les coordonnées x' et y', en fonction des angles formés par ces droites avec les anciens axes, en sorte que nous aurons ces trois équations pour déterminer V, U et W :

$$\left.\begin{aligned}\cos V &= \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',\\ \cos U &= \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'',\\ \cos W &= \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z''.\end{aligned}\right\}\ldots (539)$$

646. Si les nouveaux axes Ax', Ay', Az' sont aussi rectangulaires, les angles V, U et W seront droits; on aura donc

$$\cos V = 0, \quad \cos U = 0, \quad \cos W = 0;$$

ce qui réduira les équations précédentes à

$$\left.\begin{aligned}\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' &= 0,\\ \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0,\\ \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'' &= 0.\end{aligned}\right\}\ldots (540)$$

Ainsi, en supposant que les nouvelles coordonnées partent de la même origine, nous aurons les neuf équations (537), (538), (540), pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace, à un autre système de coordonnées rectangulaires.

Fig. 218. **647.** Si deux des nouveaux axes, AX′ et AY′ (*fig.* 218) par exemple, restent dans le plan des anciens axes AX, AY, et que AZ′ se confonde avec AZ, l'angle Z″ de ces axes AZ et AZ′ sera nul, et les angles X″ et Y″ de l'axe AZ′ avec les axes AX et AY seront droits. On aura donc $\cos Z'' = 1$, $\cos X'' = 0$, $\cos Y'' = 0$. Les nouveaux axes AX′, AY′, n'étant assujettis qu'à être dans le plan des x, y, formeront un angle arbitraire; mais l'axe AZ′, qui coïncide avec AZ, fera des angles droits avec AX′ et AY′ : on aura donc encore

$$\cos U = 0, \quad \cos W = 0;$$

par ces valeurs, et l'égalité à zéro de $\cos X''$ et de $\cos Y'$, les deux dernières des équations (539) deviendront

$$\cos Z = 0, \quad \cos Z' = 0;$$

ce qui réduira les équations (538) à

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = 1, \quad \cos^2 X' + \cos^2 Y' = 1;$$

par conséquent on aura

$$\cos Y = \sin X, \quad \cos Y' = \cos X',$$

et les équations (537) deviendront

$$x = x' \cos X + y' \cos X', \quad y = x' \sin X + y' \sin X',$$

mêmes formules que les équations (282) que l'on a trouvées (art. 385).

648. On doit à Euler d'autres formules de transformation pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système d'autres coordonnées rectangulaires formant entre elles un plan incliné à l'un des plans primitifs coordonnés; nous allons démontrer ces formules en prenant une même origine des coordonnées.

Pour cet effet, soient (*fig.* 219) x, y, z trois coordonnées rectangulaires; lorsqu'on veut passer de ces coordonnées à un nouveau système de coordonnées rectangulaires x', y', z' rapportées à la même origine, et qu'on se propose de chercher les conditions nécessaires pour déterminer la position des nouveaux axes Ax', Ay', Az' à l'égard des anciens Ax, Ay, Az (*fig.* 219), il est certain que si les axes Ax' et Ay' étaient donnés de position, le nouvel axe Az' serait déterminé par la condition d'être perpendiculaire aux deux autres : ainsi, tout se réduit à trouver la position des axes Ax', Ay'. Fig. 219.

Le plan des x', y', formé par les axes Ax', Ay', sera déterminé de position si l'on donne l'angle φ que la trace de ce plan forme avec celui des x, y, et l'angle θ qui mesure

l'inclinaison des plans des x, y et des x', y'. Les coordonnées x', y' devant se trouver à angle droit dans le plan des x', y', il suffira, pour déterminer leur position, de donner seulement l'angle que le nouvel axe Ax' fait avec la trace.

La position des nouvelles coordonnées ne dépend donc que de ces trois choses :

1°. L'angle φ que la trace du plan des x', y' sur celui des x, y fait avec l'axe des x;

2°. L'angle θ que le plan des x, y fait avec le plan des x', y';

3°. L'angle ψ que le nouvel axe Ax' fait avec la trace.

649. Pour déterminer les nouvelles coordonnées x', y', z' en fonction des anciennes x, y, z, recourons auxiliairement
Fig. 220. (*fig.* 220) à un nouveau système d'axes rectangulaires, en prenant la trace AE pour le nouvel axe A$x_{,}$ des abscisses; et cherchons quelles seront, dans ce système, les positions des deux autres axes A$y_{,}$, A$z_{,}$. L'axe A$x_{,}$, comme commune section, sera dans le plan des x, y; l'axe A$y_{,}$ y sera aussi, parce qu'il est perpendiculaire à l'axe A$x_{,}$; et puisque nous connaissons l'angle φ que la trace AE ou plutôt que l'axe A$x_{,}$ forme avec l'axe Ax, nous aurons, par la formule (184) de l'art. 387 (page 238),

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{,} \cos\varphi - y_{,} \sin\varphi, \\ y &= x_{,} \sin\varphi + y_{,} \cos\varphi; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (541)$$

et comme le plan des $x_{,}$, y' est le même que le plan des x, y qui renferme les axes A$x_{,}$, A$y_{,}$, on aura encore

$$z = z_{,} \ldots\ldots\ldots\ldots (542)$$

650. L'axe A$y_{,}$ étant donc perpendiculaire à la trace AE, si,
Fig. 221. à cette même trace, on mène au point A (*fig.* 221), dans le plan AX′ des x', y', une seconde perpendiculaire A$y_{,,}$, l'angle $y_{,}$ A$y_{,,}$ des plans AX, AX′, mesuré par ces perpendiculaires, sera l'angle que nous avons nommé θ. Or, A$y_{,}$ et Az ou

plutôt $Az_{,}$ étant perpendiculaires à AE, sont dans le plan $y_{,}$ $Ay_{,,}$; nous allons prouver qu'il en est de même des axes $Ay_{,,}$ et $Az_{,,}$: le premier y est compris par construction; à l'égard de $Az_{,,}$, remarquons que AE étant perpendiculaire aux droites $Ay_{,}$ et $Ay_{,,}$ qui se croisent à son pied, doit l'être au plan $y_{,}$ $Ay_{,,}$ qu'elles forment; on aura donc

$$x_{,} = x_{,,} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (543)$$

Or, $Az_{,,}$ étant perpendiculaire à $Ay_{,,}$ et à $Ax_{,,}$ comme axes coordonnées, réciproquement $Ax_{,,}$ ou $Ax_{,}$ le sera à $Az_{,,}$ et à $Ay_{,,}$, et par conséquent au plan $z_{,,}$ $Ay_{,,}$. Ce plan se confond donc avec le plan $y_{,}$ $Ay_{,,}$, qui contient toutes les perpendiculaires à $Ax_{,}$; d'où il résulte que $Az_{,,}$ et $Ay_{,,}$ sont dans le plan $y_{,}$ $Ay_{,,}$; et dès que l'on connaît l'angle θ que les axes $Ay_{,}$ et $Ay_{,,}$ ont entre eux, on aura (art. 387)

$$\left.\begin{aligned} y_{,} &= y_{,,} \cos\theta - z_{,,} \sin\theta, \\ z_{,} &= y_{,,} \sin\theta + z_{,,} \cos\theta; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (544)$$

651. Nous venons de voir que la droite $Ay_{,,}$ était dans le plan des x', y', et comme, d'après l'équation (543), la trace AE qui appartient au même plan, est dirigée suivant le second axe $Ax_{,,}$, les coordonnées $y_{,,}$ et $x_{,,}$ seront donc situées dans le plan des x', y'.

On passera facilement de ces coordonnées $x_{,,}$, $y_{,,}$ aux coordonnées x', y', car nous connaissons l'angle ψ que le nouvel axe Ax' fait avec l'axe $Ax_{,,}$ ou AE; et nous aurons (art. 387)

$$\left.\begin{aligned} x_{,,} &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ y_{,,} &= x' \sin\psi + y' \cos\psi. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (545)$$

Le troisième axe Az' devant être perpendiculaire au plan des deux autres Ax', Ay', comme l'axe $Az_{,,}$ jouit de cette propriété, puisqu'il est perpendiculaire au plan des coordonnées $x_{,,}$, $y_{,,}$, qui est le même que le plan des x', y', on aura encore

$$z_{,,} = z' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (546)$$

652. Si dans les formules (541) et (542) on met les valeurs de $x_{,}$, de $y_{,}$ et de $z_{,}$ données par les équations (543) et (544), et qu'ensuite on substitue dans ces résultats les valeurs de $x_{,,}$, de $y_{,,}$, de $z_{,,}$, données par les équations (545) et (546), et qu'on réunisse les termes multipliés par chacune des variables x', y', z', on trouvera

$$\begin{aligned} x &= x'(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi) \\ &\quad - y'(\cos\psi\cos\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) + z'\sin\theta\sin\varphi, \\ y &= x'(\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi) \\ &\quad + y'(\cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) - z'\sin\theta\cos\varphi, \\ z &= x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

Les signes de ces formules peuvent varier selon les inclinaisons que l'on donnera aux angles φ, θ et ψ.

653. Par exemple, si les axes $Ax_{,}$ et $Ay_{,,}$ tombaient, comme dans la *fig.* 222, derrière les axes Ax et $Ay_{,,}$, il faudrait changer les signes de $\sin\theta$ et de $\sin\varphi$ dans les formules précédentes; et l'on obtiendrait de cette manière

Fig. 222.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'(\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\cos\theta\sin\varphi) \\ &\quad + y'(\cos\psi\cos\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi) + z'\sin\theta\sin\varphi, \\ y &= x'(\sin\psi\cos\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) \\ &\quad + y'(\cos\psi\cos\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) + z'\sin\theta\cos\varphi, \\ z &= -x'\sin\psi\sin\theta - y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \ldots (547)$$

On peut simplifier ces formules en supposant $\psi = 0$, c'est-à-dire en prenant pour nouvel axe des x' la trace AE du plan des x', y' sur le plan des x, y; et, dans cette hypothèse, on aura $\sin\psi = 0$, et par conséquent $\cos\psi = 1$. Ces formules réduiront les équations (547) à

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\cos\theta\sin\varphi + z'\sin\theta\sin\varphi, \\ y &= -x'\sin\varphi + y'\cos\theta\cos\varphi + z'\sin\theta\cos\varphi, \\ z &= -y'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

CHAPITRE XIII.

Discussion de l'équation générale des surfaces du second ordre.

654. De même que toutes les courbes du second ordre sont renfermées dans l'équation générale du second degré à deux variables, de même l'algèbre nous montre que toutes les surfaces du second ordre sont comprises dans l'équation générale du second degré à trois variables.

Cette équation générale est de la forme

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz \\ \quad + Fyz + Gx + Hy + Iz + K \end{array}\right\} = 0, \ldots \quad (548)$$

dans laquelle les axes des x, des y et des z sont supposés rectangulaires. Pour faciliter les élévations au carré dont nous aurons bientôt besoin, remplaçons les constantes par d'autres constantes, en supposant

$$D = 2D', \quad E = 2E', \quad F = 2F', \quad G = 2G', \quad H = 2H', \quad I = 2I',$$

et l'équation (548) deviendra

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2D'xy + 2E'xz + 2F'yz \\ \quad + 2G'x + 2H'y + 2I'z + K \end{array}\right\} = 0. \quad . \quad . \quad (549)$$

655. Faisons une observation qui tendra à nous délivrer de cette multitude de lettres employées dans cette équation, c'est que les variables y sont distribuées en trois classes, savoir :

1°. Les trois termes de carrés des coordonnées;

2°. Les trois termes de rectangles;

3°. Les trois termes de variables élevées seulement à la première puissance.

Représentons les coefficients des termes carrés par L, M, N;

Les coefficients des termes de rectangles par L′, M′, N′;

Les coefficients des premières puissances des variables, par L″, M″, N″;

et l'équation (549) pourra être mise sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l} Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2L'xy + 2M'xz + 2N'yz \\ \quad + 2L''x + 2M''y + 2N''z + K \end{array}\right\} = 0. \quad . \quad . \quad (550)$$

Cette équation, ordonnée par rapport à z et divisée par le coefficient N de z^2, devient

$$\left.\begin{array}{l} z^2 + 2\dfrac{(M'x + N'y + N'')z}{N} \\ \quad + \dfrac{Lx^2 + My^2 + 2(L'xy + L''x + M''y) + K}{N} \end{array}\right\} = 0;$$

et, en représentant par V la fonction de x, de y et de K qui vient après les termes en z^2 et en z, il reste

$$z^2 + 2\frac{(M'x + N'y + N'')z}{N} + V = 0,$$

et, en résolvant cette équation, nous aurons

$$z = -\frac{(M'x + N'y + N'')}{N} \pm \sqrt{\left(\frac{M'x + N'y + N''}{N}\right)^2 - V}.$$

Si l'on met à part le radical, on voit que l'équation

$$z = -\frac{(M'x + N'y + N'')}{N}$$

est celle d'un plan sur lequel les ordonnées z sont situées; mais si l'on a égard au radical, z a toujours deux valeurs égales,

l'une représentée par $-\left(\dfrac{M'x + N'y + N''}{N}\right) +$ *le radical,*

et l'autre par $-\left(\dfrac{M'x + N'y + N''}{N}\right). -$ *le radical;*

ce qui montre que toutes les cordes parallèles à l'axe des z sont partagées en deux parties égales par le plan dont l'équation est

$$z = -\frac{(M'x + N'y + N'')}{N}. \quad \ldots\ldots (551)$$

Ce plan, qui passe par le milieu de toutes les cordes parallèles à l'axe des z, est ce qu'on appelle le *plan diamétral*.

Ce plan est oblique à celui des x, y, puisque, s'il lui était parallèle, au lieu de l'équation (551) on aurait

$$z = constante;$$

mais les ordonnées z, étant perpendiculaires au plan des x, y, doivent nécessairement couper obliquement le plan auquel se rapporte l'équation (551), parce qu'il est incliné au plan des x, y.

656. Ce plan, qui coupe (art. 655) toutes les cordes parallèles à l'axe des z en deux parties égales, coupe de même la corde dont l'axe des z est la moitié. Cette corde, que le centre coupe en deux parties égales, est donc un *diamètre*.

657. La position du plan des x, y étant arbitraire, supposons que ce plan ait été mené parallèlement au plan diamétral que nous venons d'établir; les cordes comprises entre les deux plans ne cesseront pas d'être obliques, puisqu'elles n'ont pas changé à l'égard du plan diamétral auquel on vient de démontrer qu'elles étaient obliques, et qui a toujours gardé la même position à l'égard de la surface. Dans ce cas l'équation du plan diamétral, au lieu d'être

$$z = -\frac{(M'x + N'y + N'')}{N},$$

se réduira à

$$z = constante;$$

d'où il suit qu'on devra avoir $M' = 0$, $N' = 0$; et l'équation (550) de la surface, perdant les deux termes $2M'xz$ et $2N'yz$, deviendra

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2L'xy + 2L''x' + 2M''y + 2N''z + K = 0 \ldots (552)$$

658. En cette nouvelle position du plan des x, y, et sans déranger l'origine, changeons dans ce plan la direction des axes des x et des y à l'aide de la transformation ordinaire des coordonnées du chap. XII. Nous pourrons faire évanouir le terme en xy, et alors, faisant passer dans le second membre la nouvelle constante que cette transformation amènera, et en la désignant par P, l'équation (552) prendra cette forme (*)

$$Lx^2+My^2+Nz^2+2L''x+2M''y+2N''z=P. \quad . \quad . \quad (553)$$

659. Jusqu'à présent l'axe des z et l'origine, pris au hasard primitivement, n'ont pas changé de place; dérangeons maintenant cette origine en faisant

$$x=x'-\alpha, \quad y=y'-\beta, \quad z=z'-\gamma \text{ (**)}.$$

Cette substitution dans l'équation (553), en supprimant les accents des variables devenus inutiles, parce que nous ne considérerons plus les anciennes coordonnées, nous amènera le résultat

$$\left.\begin{array}{l} Lx^2+My^2+Nz^2+2(L''-L\alpha)x+2(M''-M\beta)y+2(N''-N\gamma)z \\ \quad -L\alpha^2-M\beta^2-N\gamma^2+2L''\alpha+2M''\beta+2N''\gamma \end{array}\right\}=P \ldots (554)$$

Égalant à zéro les termes qui dans l'équation (554) contiennent x, y, z au premier degré, on obtiendra ces équations de condition

$$L''-L\alpha=0, \quad M''-M\beta=0, \quad N''-N\gamma=0,$$

et l'on déterminera ainsi α, β et γ,

$$\alpha=\frac{L''}{L}, \quad \beta=\frac{M''}{M}, \quad \gamma=\frac{N''}{N}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (555)$$

l'équation (554), en vertu des équations de condition (555),

(*) Observons que les constantes L'', M'', N'', P n'auront plus les mêmes valeurs qu'elles ont dans l'équation (552).

(**) On aurait pu également supposer $x=x'+\alpha$, $y=y'+\beta$, $z=z'+\gamma$, puisque α, β, γ sont des valeurs générales qu'on détermine ensuite; mais nous leur donnons le signe négatif pour que ces valeurs soient positives dans les équations (555), que nous allons obtenir.

ayant perdu ses termes affectés des premières puissances des variables, représentons par R les termes constants, elle se réduit à

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = R. \quad \ldots\ldots \quad (556)$$

660. Si, dans l'une des équations (555), un dénominateur est nul, la valeur du premier membre devient infinie; par exemple, si $N = 0$, on a

$$\gamma = \frac{N''}{0} = \infty;$$

mais alors la troisième des équations (555) ne peut avoir lieu; car N, étant nul, ferait disparaître le terme Nz^2 de l'équation (553); et comme, d'un autre côté, la troisième des équations (555) n'exprime plus une valeur finie, le terme qui contient z au premier degré ne peut s'évanouir.

661. Dans ce cas, au lieu d'éliminer à la fois les termes affectés des premières puissances des variables, ce qui devient impossible, on peut, dans l'équation qui, par hypothèse, a perdu son terme en Nz^2, faire disparaître encore trois termes de cette équation, en égalant à zéro les termes en x et en y et la somme des termes constants de l'équation (554). En opérant ainsi, nous aurons ces trois équations de condition

$$L'' - L\alpha = 0, \quad M'' - M\beta = 0,$$

$$P + L\alpha^2 + M\beta^2 - 2L''\alpha - 2M''\beta - 2N''\gamma = 0;$$

d'où nous tirerons

$$\alpha = \frac{L''}{L}, \quad \beta = \frac{M''}{M}, \quad \gamma = \frac{P + L\alpha^2 + M\beta^2 - 2L''\alpha - 2M''\beta}{2N''} \ldots\ldots \quad (557)$$

662. Les équations (557) faisant disparaître (*) de l'équation (554) les termes en x et en y au premier degré et le terme constant, cette équation prend la forme

$$Mx^2 + Ny^2 = 2Qz; \quad \ldots\ldots \quad (558)$$

(*) Ne perdons pas de vue que le terme en z^2 n'existe pas, attendu que son coefficient est nul dans l'hypothèse de l'art. 660.

mais il peut arriver que la valeur de γ, déterminée par la dernière des équations (557), et d'où dépend la disparition du terme constant de l'équation (554), soit également infinie; c'est ce qui a lieu lorsque $N''=0$. Dans ce cas, l'hypothèse $N\gamma = 0$, qui entraîne la disparition du terme en z, jointe à l'hypothèse de $N''=0$, nécessitera aussi l'évanouissement du coefficient $2(N''-N\gamma)$ de z au premier degré de l'équation (554), quel que soit z; et comme les valeurs de L, de M, de L″ et de M″, qui entrent dans les seconds termes des premières des équations (557), ne sont ni nulles ni infinies, les valeurs de α et de β sont possibles, et par conséquent font évanouir les termes qui contiennent x et y au premier degré dans l'équation (554), qui, dans sa réduction, prend la forme

$$Lx^2 + My^2 = R.$$

Nous reconnaîtrons bientôt que, dans ce cas, la surface est cylindrique. A l'égard des hypothèses où deux et même trois des coefficients des carrés des variables seraient nuls, nous verrons qu'elles nous conduiraient également à des surfaces cylindriques ou planes.

663. Il suit de ce qui précède que, hors les cas exceptionnels et celui des surfaces coniques, dont nous nous occuperons aussi, toutes les surfaces du second ordre se rattachent à ces deux équations

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = P, \quad \ldots\ldots \quad (559)$$

$$Lx^2 + My^2 = 2Qz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (560)$$

La première est celle des surfaces à centre, et la seconde est celle des surfaces privées de centre, ainsi qu'on va le démontrer. Par *centre*, nous entendons un point situé dans la surface, de telle manière que si un rayon vecteur part du centre, il s'en trouve un autre sur son prolongement qui, ayant la même longueur, va rencontrer la surface à son extrémité opposée.

Prenons ce centre pour origine, et admettons que les coor-

données $x = a$, $y = b$, $z = c$ soient celles d'un point de la surface; il faut donc que les coordonnées $x = -a$, $y = -b$, $z = -c$ soient celles du point opposé; or, si dans l'équation (559) on introduit les valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$, cette équation, ne contenant que les carrés, donnera pour x, y et z des valeurs égales et de signes contraires; d'où il suit que a, b, c étant les coordonnées d'un point de la surface, $-a$, $-b$, $-c$ seront celles du point directement opposé et également distant du centre. Ces droites qui passent par le centre sont des diamètres.

Par un point M quelconque de la surface menons un rayon vecteur, c'est-à-dire une droite qui passe par le centre, et supposons que cette droite soit primitivement prise pour axe des z; ce rayon, prolongé d'une partie égale à sa longueur, rencontrera la surface et constituera un diamètre.

Voilà donc une propriété bien remarquable des surfaces à centre qui est l'analogue de celle que nous avons remarquée dans les courbes à centre du second ordre.

664. Il est facile de prouver qu'au contraire, la surface qui est comprise dans l'équation (560) n'a pas de centre; car, si l'on donne aux coordonnées les valeurs positives $+x$, $+y$, $+z$, on trouvera

$$z = \frac{Mx^2 + Ny^2}{2Q};$$

tandis que, si aux coordonnées on donne les valeurs négatives

$$-x, \quad -y, \quad -z,$$

on trouvera

$$z = -\frac{(Mx^2 + Ny^2)}{2Q},$$

et, quoique ces deux valeurs de z soient égales et de signes contraires, il n'en est pas de même de celles de x et de y; car, en mettant dans l'équation (560) les deux valeurs de z

que nous venons de trouver, on a

$$Lx^2 + My^2 = 2Qz, \quad Lx^2 + My^2 = -2Qz;$$

et l'on voit que ces hypothèses de z et de $-z$ n'amènent pas des valeurs égales pour x^2; ce qui serait nécessaire pour que x eût deux valeurs égales et de signes contraires : il en est de même de y.

665. Les surfaces à centre comprennent plusieurs genres; pour le démontrer, laissons le terme constant dans le membre où il est positif, et supposons que ce membre soit le second : les termes compris dans le premier ne pourront donner qu'une somme ou qu'une différence; car, comme nous en avons déjà fait la remarque, l'équation serait absurde si l'on égalait à une quantité essentiellement positive une somme de quantités négatives. Nous n'aurons donc que ces trois combinaisons(*),

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = P, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (561)$$

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = P, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (562)$$

$$Nz^2 - Lx^2 - My^2 = P. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (563)$$

En comparant la première de ces équations à celle que nous avons trouvée (art. 587), on voit que la surface qu'elle représente n'est autre chose que celle de l'ellipsoïde.

666. Pour mettre l'équation de cette courbe sous une forme

(*) Nous ne parlons pas des cas où l'on aurait

$$Lx^2 + Nz^2 - My^2 = P,$$
$$My^2 + Nz^2 - Lx^2 = P,$$
$$My^2 - Nz^2 - Lx^2 = P,$$
$$Lx^2 - Nz^2 - My^2 = P,$$

parce qu'ils rentrent dans ceux des équations (561), (562), (563); ce que nous disons de l'une des variables pouvant s'appliquer aux autres.

plus symétrique, divisons-la par P, nous aurons

$$\frac{Lx^2}{P} + \frac{My^2}{P} + \frac{Nz^2}{P} = 1,$$

et en divisant les deux termes de chacune de ces fractions par son numérateur, nous n'en changerons point la valeur, ce qui nous donnera

$$\frac{x^2}{\left(\frac{P}{L}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{P}{M}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{P}{N}\right)} = 1; \quad \ldots\ldots \quad (564)$$

le second membre étant de dimension nulle, il en doit être de même du premier, ce qui exige que les expressions renfermées entre les parenthèses soient chacune de deux dimensions; et comme, d'après le classement que nous avons fait (art. 665), L, M, N, P sont essentiellement positifs, les fractions $\frac{P}{L}$, $\frac{P}{M}$, $\frac{P}{N}$ étant des quantités positives de deux dimensions, nous pouvons les représenter par a^2, b^2, c^2, et l'équation (563) deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et, en chassant les dénominateurs, nous donnera

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2. \quad \ldots\ldots \quad (565)$$

Cette équation, qui est la même que celle de l'art. 586, comprise sous le n° (482), a un bien plus grand degré de généralité, car celle du n° (482) n'appartenait qu'aux axes, tandis que celle-ci a lieu entre trois diamètres qui, en se réunissant au centre, forment entre eux des angles quelconques dont les axes ne sont qu'un cas particulier, celui où les angles dont nous venons de parler sont droits. Ces diamètres portent le nom de *diamètres conjugués*, par la liaison qu'ils ont entre eux et de laquelle il résulte que chacun des plans coordonnés partage la

coordonnée parallèle à l'axe qu'il ne renferme pas en deux parties égales; car en faisant

$$\left.\begin{array}{l} c=0 \text{ et } a=0, \\ c=0 \text{ et } a=0, \\ a=0 \text{ et } b=0, \end{array}\right\} \text{ l'équation (565) nous donne } \left\{\begin{array}{l} x=\pm a, \\ y=\pm b, \\ z=\pm c. \end{array}\right.$$

667. La deuxième et la troisième variété des courbes à centre sont comprises dans les équations (562) et (563), dans lesquelles on reconnaît celles de l'hyperboloïde à une nappe et de l'hyperboloïde à deux nappes.

668. Les courbes, qui n'ont pas de centre et auxquelles se rapporte l'équation (560),

$$Lx^2 + My^2 = 2Qz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (566)$$

ne renferment que deux divisions, savoir, celle où, ayant placé $2Qz$ dans le membre où ce terme est positif, l'autre membre exprime une somme ou une différence, ce qui établit pour ces deux classes de surfaces les équations

$$Lx^2 + My^2 = 2Qz,$$

$$Lx^2 - My^2 = 2Qz,$$

équations qui sont celles du paraboloïde elliptique et du paraboloïde hyperbolique, dont nous avons traité au chap. XI.

669. Lorsque l'équation générale (550) [art. 654] est dépourvue des termes qui renferment les rectangles des coordonnées, elle se réduit à la forme

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + L''x + M''y + N''z + K = 0. \quad (567)$$

Si dans cette équation on substitue les valeurs

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma,$$

l'origine changera de place, et, en représentant la somme algébrique des termes constants transportés dans le second

membre par P, on aura

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 + 2L\alpha \left| \begin{array}{l} x' + 2M\beta \\ \quad + M'' \end{array} \right| \begin{array}{l} y' + 2N\gamma \\ \quad + N'' \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. z' = P; \ldots \quad (568)$$

faisant évanouir les trois termes affectés des premières puissances des variables, en égalant leurs coefficients à zéro, on obtient

$$\alpha = \frac{-L''}{2L}, \quad \beta = \frac{-M''}{2M}, \quad \gamma = \frac{-N''}{2N}.$$

Ces valeurs sont toujours possibles lorsque les termes L, M, N ne sont pas nuls; par conséquent, l'équation générale peut se réduire à

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = P, \ldots\ldots\ldots \quad (569)$$

ce qui est la forme des courbes à centre.

670. Mais lorsque le coefficient de l'un des termes affectés des carrés des variables est nul, on ne peut faire évanouir le terme qui contient cette même variable à la première puissance : par exemple, si, dans l'équation (568), le coefficient N de z'^2 est nul, le coefficient de z' ne peut s'évanouir, parce que la valeur $2N\gamma + N''$ de ce coefficient, se réduisant à N'', ne peut être égalée à zéro pour déterminer γ qui est la coordonnée de la nouvelle origine dans le sens des z; dans ce cas-là nous ne pourrons donc égaler à zéro que les termes en x' et y', ce qui réduira l'équation (568) à la forme

$$My^2 + Lx^2 + Nz = P; \ldots\ldots\ldots \quad (570)$$

et comme nous n'avons disposé que de deux des quantités arbitraires α, β, γ, en égalant à zéro les coefficients de x' et de y', nous pourrons déterminer γ en égalant aussi à zéro la somme des termes constants représentée par P dans l'équation (568). Ce terme P ne renfermant γ qu'au premier degré, parce que $N = 0$, il sera toujours possible de déterminer γ convenablement pour que P s'évanouisse; alors notre équation deviendra

$$My^2 + Lx^2 + Nz = 0. \ldots\ldots\ldots \quad (571)$$

Si au lieu de $N = 0$ on avait $M = 0$ ou $L = 0$, nous parviendrions à une équation de même forme que la précédente, mais dans laquelle les diamètres conjugués seraient mutuellement changés; et comme la situation respective de ces diamètres nous est indifférente, nous ne considérons que l'équation (569).

671. L'équation (567) comprenant les équations (569) et (571), auxquelles l'équation générale se réduit, a donc toute la généralité de cette équation générale.

CHAPITRE XIV.

Des cas particuliers de l'équation générale des surfaces du second ordre, où l'on ne peut construire une des cinq surfaces dont il est question dans le chapitre précédent.

672. Nous avons vu (art. **662**) que, lorsque le coefficient d'une variable et celui de son carré manquent dans l'équation (552), cela nous conduisait à celle-ci :

$$Lx^2 + My^2 = R;$$

on tomberait sur un même résultat si, dans l'équation (553), on avait

$$N = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \quad M'' = 0, \quad N'' = 0,$$

car elle se réduirait à

$$Lx^2 + My^2 = P.$$

Pour savoir ce que signifie cette équation, rattachons (art. **589**) à l'équation (487) de l'ellipsoïde qui a pour trace de la section faite par un plan parallèle à celui des x; y, à une distance γ comptée sur l'axe oblique des z,

$$Lx^2 + My^2 = P - N\gamma^2.$$

Cette équation, en opérant comme dans l'art. 590, nous donnera pour axes des x et des y de l'ellipse tracée par la section,

$$a^2 = \frac{P - N\gamma^2}{L}, \quad b^2 = \frac{P - N\gamma^2}{M},$$

et l'on voit que, dans le cas où $N = 0$, on a

$$a^2 = \frac{P}{L}, \quad b^2 = \frac{P}{M},$$

valeurs qui sont les mêmes que celles que nous donnerait l'équation de la trace sur le plan des x, y, tirée de l'équation (564); d'où il suit que toutes les ellipses des sections seront les mêmes que celles de la base; et comme l'axe est oblique et passe par tous les centres, la surface sera donc celle d'un cylindre à base elliptique et à arêtes obliques, tel qu'on le voit (*fig.* 123), ou d'un cylindre hyperbolique si la base, au lieu d'être une ellipse, est une hyperbole. Fig. 123.

673. Si les diamètres conjugués forment entre eux des angles droits, ils se changeront en axes, et le cylindre sera droit.

Au reste, on voit que, quand le terme N manque, l'équation de l'ellipsoïde, dans un système d'axes rectangulaires, se réduit à

$$Lx^2 + My^2 = P \ldots\ldots\ldots\ldots (572)$$

Il est à remarquer que, quoique z n'entre pas dans cette équation, cette coordonnée ne subsiste pas moins, car la condition $N = 0$ ne dit pas que z soit nul. Tout point de la surface est toujours déterminé par les trois coordonnées x, y, z. Cette dernière seulement n'est assujettie qu'à rester parallèle à l'axe des z, et à être comprise entre deux points, l'un sur l'intersection de la surface par le plan, et l'autre sur la trace; à part cela, z est arbitraire.

Faisons donc $z = 0$ pour avoir la trace sur le plan des x, y, et l'équation (572) nous montre que cette trace est une ellipse; mais quand z ne sera pas nul, sa longueur parallèle à l'axe des z

ne sera autre chose que l'arête d'un cylindre oblique à base elliptique. Ce cylindre est représenté par la *fig.* 123.

Fig. 123.

Il suit de ce qui précède que si, par tous les points de l'ellipse tracée sur le plan des x, y, on mène des ordonnées obliques parallèles à l'axe des z et de même grandeur, ces ordonnées appartiendront toutes à la surface; cette surface sera donc un cylindre.

Si $L = M$, la base de ce cylindre est un cercle, puisqu'alors l'équation (572) devient

$$x^2 + y^2 = \frac{P}{M}.$$

674. Enfin, si dans l'équation (569), on a

$$L = 0 \quad \text{et} \quad N = 0,$$

cette équation se réduit à $My^2 = P$ et donne

$$y = \pm \sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Or, nous avons vu (art. 657) que l'équation $y = constante$ est celle d'un plan parallèle au plan des x, z; donc l'équation

$$y = \pm \sqrt{\frac{P}{M}}$$

appartient à deux plans parallèles à celui des x, z, dont l'un couperait l'axe des y, et l'autre son prolongement, à des distances de l'origine représentées par $\sqrt{\frac{P}{M}}$.

Ce que nous disons de l'ellipsoïde dans un système de coordonnées obliques s'applique à l'hyperboloïde dans un système de coordonnées obliques.

675. Supposons maintenant que deux des coefficients des

termes carrés manquent dans l'équation (553) (*), et que ce soit par exemple celui de z qui reste, l'équation se réduira, dans ce cas, à

$$Nz^2 + 2L''x + 2M''y + 2N''z = P. \ldots \quad (573)$$

Si l'on fait $z = 0$, on aura, pour l'équation de la trace sur le plan des x, y,

$$2L''x + 2M''y = P, \ldots\ldots\ldots \quad (574)$$

et l'on voit que cette trace est une ligne droite.

Si l'on fait ensuite $z = \gamma$ dans l'équation (573), on aura, pour l'équation de la section faite par un plan parallèle à celui des x, y, et coupant l'axe oblique des z à une distance égale à γ,

$$L''x + M''y = \tfrac{1}{2}(P - N\gamma^2 - 2N''\gamma),$$

ou plutôt

$$y = -\frac{L''x}{M''} + \frac{1}{2M''}(P - N\gamma^2 - 2N''\gamma). \ldots \quad (575)$$

Le second membre de cette équation se compose de deux parties, l'une multipliée par x, et l'autre, fonction de γ; cette seconde exprime la distance de l'origine au point où la droite qui appartient à l'équation (575) coupe l'axe des y, et varie avec γ. Quant à la première partie, comme la fraction constante qui multiplie x représente la tangente trigonométrique de l'angle formé par la droite avec l'axe des x, cet angle est donc constant. Il suit de là que la surface, étant engendrée par une ligne droite qui se meut constamment parallèlement à elle-même, doit être rangée parmi les surfaces cylindriques.

676. Enfin la surface est un cylindre lorsque L est nul dans l'équation (566), qui, lorsque M et Q sont de mêmes signes, se réduit à

$$My^2 = 2Qz.$$

(*) Ce que nous disons sur ces termes carrés s'applique à tous.

Il serait facile de démontrer que la base de ce cylindre est sur le plan des z, y, si nous ne jugions pas à propos de changer la position de cette base, que nous avons précédemment supposée reposer sur le plan des x, y. Pour cela, comme le choix des coordonnées est arbitraire, nous pouvons changer x en z et z en x, et remplacer l'équation (566)

$$Lx^2 + My^2 = 2Qz$$

par celle-ci

$$Lz^2 + My^2 = 2Qx;$$

en supposant toujours que L soit nul, on tirera de cette équation celle-ci

$$y^2 = 2\frac{Q}{M}Qx,$$

qui est celle d'une parabole; et en y appliquant tout ce que nous avons dit (art. 673) au sujet de l'équation (572), on reconnaîtra que, dans ce cas, la surface est un cylindre oblique à base parabolique et reposant sur le plan des x, y.

677. Considérons le cas où tous les termes seraient nuls, hors ceux qui renferment les carrés, et où, par conséquent, l'équation (567) se réduirait à

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0:$$

des trois équations (561), (562) et (563), il n'y aurait que les deux dernières qui pourraient déterminer un système de points, car la première ne renfermant que des carrés et des coefficients qui, par hypothèse, sont positifs, cette équation ne pourrait être satisfaite que par les valeurs

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

qui ne détermineraient qu'un point à l'origine. Quant aux deux autres, dans notre hypothèse de P nul, elles rentrent l'une dans l'autre en changeant les signes de la troisième; alors il ne s'agit

plus que d'examiner quelle espèce de surface donne l'équation

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0.$$

Coupons la surface par un plan parallèle à celui des x, y, en faisant $z = \gamma$; l'équation de la trace sur ce plan sera donc

$$Lx^2 + My^2 = N\gamma^2,$$

et nous reconnaissons là celle de l'ellipse; écartant davantage le plan sécant de celui des x, y, il est facile de démontrer que cette ellipse s'accroîtra; car, en opérant comme dans l'art. **666**, si l'on désigne par a et b les demi-diamètres de cette ellipse, nous aurons

$$a^2 = \frac{N\gamma^2}{L}, \quad b^2 = \frac{N\gamma^2}{M},$$

et nous voyons que plus les deux plans s'écarteront l'un de l'autre, en agrandissant successivement γ, plus ces axes s'accroîtront; de sorte que si, au contraire, on approche le plan sécant de celui des x, y, l'ellipse de la section diminuera jusqu'à ce qu'elle se réduise à un point lorsque les deux plans coïncideront. Or, l'axe des z qui est oblique, passant par les centres de ces ellipses, on voit que leur ensemble constitue un cône oblique dont le sommet est sur le plan des x, y, et dont la base, qui s'accroît successivement, est une ellipse; ce cône est représenté par ABC (*fig.* 124). Fig. 124.

678. Enfin, lorsque les coefficients des carrés des variables et ceux de leurs rectangles sont nuls, l'équation (553) se réduit à

$$L''x + M''y + N''z = \tfrac{1}{2}P,$$

et devient celle d'un plan situé d'une manière quelconque, suivant les valeurs qu'on donne aux constantes L'', M'', N'' et P. Lorsque P est également nul, il ne reste plus que

$$L''x + M''y + N''z = 0. \quad \ldots\ldots \quad (576)$$

Si l'on fait $z = \gamma$, et que par l'extrémité de cette ordonnée oblique on mène un plan parallèle à celui des x, y, on obtiendra

$$y = -\frac{L''}{M''}x - \frac{N''\gamma}{M''},$$

et l'on voit que la section faite sur un plan parallèle à celui des y, x, sera une ligne droite à angle oblique qui, si L'' et M'' ne changent pas de signes, formera un angle obtus avec l'axe des x et coupera le prolongement de celui des y à une distance $\frac{N''\gamma}{M'}$ de l'origine: plus le plan sécant se rapprochera de celui des x, y, plus cette distance, à cause de γ qui entre dans son expression, diminuera; de sorte que, quand γ sera nul, l'équation, réduite à

$$y = -\frac{L''}{M''}x,$$

sera celle d'une droite passant par l'origine. Il suit de là que l'équation (576) donnera naissance à une suite de parallèles à l'axe des z, qui constitueront un plan passant par l'origine et coupant l'axe des x suivant une droite dont l'équation existera entre des coordonnées obliques, à moins que les diamètres conjugués ne se changent en axes rectangulaires, cas où l'équation deviendra celle de la ligne droite ordinaire.

679. Les surfaces cylindriques et coniques appartiennent à une classe de surfaces comprises sous la dénomination de *surfaces développables*, parce que ce sont des surfaces qui peuvent être étendues sur un plan sans duplicatures, c'est-à-dire sans que certaines parties ne se replient sur le développement de la surface, et sans déchirures.

Un cylindre, abstraction faite de deux bases, étant regardé comme un prisme d'un nombre infini de faces, si l'on considère deux de ces faces unies par une arête, et que l'une reposant sur un plan, l'autre tourne autour de cette arête, comme

autour d'une charnière, celle-ci, finira dans son mouvement, par se coucher à la suite de l'autre, et en devenir ainsi la continuation. Ce que nous disons de ces deux plans s'applique à un troisième, à un quatrième, etc., qui, en se développant successivement, formeront une surface couchée sur le plan.

Il en est de même du cône, considéré comme la limite des pyramides.

CHAPITRE XVI.

Des plans tangents aux surfaces courbes du second ordre.

680. Nous avons vu (art. **671**) que l'équation générale des courbes du second ordre est toujours susceptible d'être dépourvue des termes qui contiennent le rectangle des coordonnées, sans que cette équation perde sa généralité; nous pourrons donc la mettre sous la forme

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dz + Ey + Fx + G = 0. \quad (577)$$

Par un point O, pris sur la surface (*fig.* 225), faisons passer le plan OI, dont l'équation est, en général, Fig. 225.

$$Lx + My + Nz + P = 0. \quad (578)$$

Il s'agit de déterminer les coefficients de cette équation par les conditions nécessaires pour que le plan devienne tangent à la surface courbe, au point O (*fig.* 225). A cet effet, menons par le point O deux plans OQX′, OQY′ parallèles, l'un au plan des x, z, et l'autre au plan des y, z; ces plans couperont la surface suivant les arcs ORX′, OSY′, et le plan OHIK suivant les droites OH et OK : or, il est évident que si le plan est tangent à la surface, les droites OH, OK devront être des tangentes aux arcs ORX′,

OSY'; car si cela n'était pas, le plan OHIK couperait la surface courbe.

Cela posé, les coordonnées du point O étant représentées par α, β, γ, elles satisferont à la fois à l'équation (577) de la surface et à l'équation (578) du plan; on aura donc

$$\left.\begin{array}{l} A(z^2-\gamma^2)+B(y^2-\beta^2)+C(x^2-\alpha^2) \\ +D(z-\gamma)+E(y-\beta)+F(x-\alpha) \end{array}\right\}=0, \quad . \quad . \quad . \quad (579)$$

$$\frac{L}{N}(x-\alpha)+\frac{M}{N}(y-\beta)+(z-\gamma)=0. \quad . \quad . \quad (580)$$

Les plans OQY' et OQX' ayant respectivement pour équations

$$x=\alpha, \quad y=\beta,$$

les sections OSY' et ORX' s'obtiendront en substituant successivement ces valeurs de x et de y dans l'équation (579), et l'on aura

$$A(z^2-\gamma^2)+B(y^2-\beta^2)+D(z-\gamma)+E(y-\beta)=0, \quad . \quad . \quad (581)$$

$$A(z^2-\gamma^2)+C(x^2-\alpha^2)+D(z-\gamma)+F(x-\alpha)=0. \quad . \quad . \quad (582)$$

De même, en substituant successivement $x=\alpha$ et $y=\beta$ dans l'équation (580) du plan OHIK, on obtiendra, pour les équations des droites OK et OH,

$$\frac{M}{N}(y-\beta)+z-\gamma=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (583)$$

$$\frac{L}{N}(x-\alpha)+z-\gamma=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (584)$$

Déterminons maintenant les coefficients $\frac{M}{N}$, $\frac{L}{N}$ par les conditions que les droites OK, OH soient des tangentes aux courbes ORX', OSY'.

Pour cet effet, l'équation (583) étant celle d'une droite OK

qui passe par un point α, β, γ de la courbe OSY′, assujettissons cette droite à passer par un second point de cette courbe, alors elle deviendra une sécante; si nous supposons ensuite que les deux points coïncident, cette sécante se changera en tangente. En désignant par $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$ les coordonnées d'un point commun à la courbe OSY′ et à la droite OK, ces coordonnées satisferont donc à leurs équations (583) et (581), et l'on aura

$$A(2\gamma\gamma' + \gamma'^2) + B(2\beta\beta' + \beta'^2) + D\gamma' + E\beta' = 0,$$

$$\frac{M}{N}\beta' + \gamma' = 0.$$

Éliminant γ' entre ces équations, ordonnant ensuite par rapport à β', et supprimant le facteur commun, on trouvera

$$\left(\frac{AM^2}{N^2} + B\right)\beta' - 2A\gamma\frac{M}{N} + 2B\beta - D\frac{M}{N} + E = 0, \ldots (585)$$

β' étant la différence des coordonnées des points de contact, dans le sens des y; cette différence devient nulle lorsque ces points se réunissent et que la droite devient tangente: on a donc, dans ce cas, $\beta' = 0$, et l'équation (585) nous donne

$$\frac{M}{N} = \frac{2B\beta + E}{2A\gamma + D}.$$

En traitant de la même manière les équations (582) et (584), on trouvera, pour la valeur du second coefficient,

$$\frac{L}{N} = \frac{2C\alpha + F}{2A\gamma + D}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (580) les valeurs que nous venons de déterminer pour $\frac{L}{N}$ et pour $\frac{M}{N}$, nous trouverons, pour l'équation du plan tangent au point α, β, γ,

$$\frac{(2C\alpha + F)}{2A\gamma + D}(x - \alpha) + \frac{2B\beta + E}{2A\gamma + D}(y - \beta) + (z - \gamma) = 0;$$

ou, en faisant évanouir les dénominateurs,

$$(2C\alpha+F)(x-\alpha)+(2B\beta+E)(y-\beta)+(2A\gamma+D)(z-\gamma)=0. \quad (586)$$

681. Les équations de la normale au point α, β, γ de la surface peuvent se déduire facilement de celle du plan tangent : en effet, les équations d'une droite étant

$$x = az+\alpha, \quad y = bz+\beta, \quad \ldots \quad (587)$$

pour qu'elle soit perpendiculaire au plan de l'équation (586), qu'on peut mettre sous cette forme

$$(2C\alpha+F)x+(2B\beta+E)y+(2A\gamma+D)z+K=0;$$

il faut qu'entre les coefficients des variables, il y ait (art. **573**) les relations

$$2C\alpha+F=a(2A\gamma+D), \quad 2B\beta+E=b(2A\gamma+D). \quad \ldots \quad (588)$$

La normale étant assujettie à passer par le point α, β, γ, les équations (587) deviennent, dans ce cas,

$$x-\alpha=a(z-\gamma), \quad y-\beta=b(z-\gamma);$$

substituant dans ces équations les valeurs de a et de b, tirées des équations (588), on obtient

$$x-\alpha=\frac{2C\alpha+F}{2A\gamma+D}(z-\gamma), \quad y-\beta=\frac{2B\beta+E}{2A\gamma+D}(z-\gamma);$$

telles sont les équations d'une normale au point α, β, γ, donné sur la surface courbe du second ordre.

FIN DE LA THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE. (Page 13.)

Des arcs plus grands que la circonférence, et des arcs négatifs.

Dans le cas des sinus positifs, un sinus donné n'appartient qu'à deux arcs (*fig.* 226), savoir, AM et AM'; car, en menant la parallèle MM' à AB, les deux valeurs MP et M'P' sont égales; et, en appelant π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité (*), ces valeurs peuvent être représentées par sin a et par sin $(\pi - a)$; et, en général, si nous ajoutons un certain nombre de fois la circonférence, nous verrons que le même sinus appartient aux arcs suivants : Fig. 226.

$$a, \quad 2\pi + a, \quad 4\pi + a, \quad 6\pi + a, \text{ etc. } . . . (a)$$

$$\pi - a, \quad 3\pi - a, \quad 5\pi - a, \quad 7\pi - a, \text{ etc. } . . . (b)$$

Déterminons maintenant les arcs positifs qui correspondent aux sinus négatifs. Nous avons vu (art. 29) que ces sinus tombaient au-dessous du diamètre AB (*fig.* 226); par conséquent, lorsque l'arc ne dépasse pas la circonférence entière, un sinus donné ne peut avoir que deux valeurs, P'N' et PN. Cherchons donc à quel arc chacune de ces valeurs appartient.

Pour cet effet, le premier de ces sinus ayant son sommet

(*) Le rapport du diamètre à la circonférence, comme c'est une chose convenue parmi les géomètres, étant représenté par $1 : \pi$, la circonférence devient 2π lorsque le rayon est pris pour unité. Nous sommes donc fondé à désigner par π la demi-circonférence.

en N′, représentons par a l'arc ADBN′, en posant l'équation

$$\text{ADBN}' = a; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

nous allons chercher quel sera, dans cette hypothèse, l'arc ABDN ; or, il est évident que l'on a

$$\text{arc ADCN} = \text{circ.} - \text{arc AN},$$

ou, parce qu'arc AN équivaut à arc BN′,

$$\text{arc ADCN} = \text{circ.} - \text{arc BN}',$$

ou

$$\text{arc ADCN} = 2\pi - \text{arc BN}'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Mettant $a - \pi$ à la place de arc BN′, l'équation (d) devient

$$\text{arc ADBCN} = \pi - a. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Si nous passons maintenant à l'hypothèse où l'arc croît indéfiniment, il faudra ajouter la circonférence entière aux arcs exprimés par les équations (c) et (e), et en y comprenant ces arcs, nous formerons ces deux formules, qui appartiendront à un sinus négatif,

$$a, \quad 2\pi + a, \quad 4\pi + a, \quad 6\pi + a, \ldots\ldots \quad (f)$$

$$\pi - a, \quad 3\pi - a, \quad 5\pi - a, \quad 7\pi - a, \ldots\ldots \quad (g)$$

etc., etc., etc.

Les séries (a) et (f) sont comprises dans l'expression générale

$$2n\pi + a,$$

et les séries (b) et (g) sont comprises dans celle-ci

$$(2n + 1)\pi - a.$$

On considère aussi des arcs négatifs. Ainsi, en allant à rebours, si nous voulons, par exemple, déterminer (*fig.* 226) les sinus MP et M′P′,

MP appartiendra à l'arc ANBM,

M′P′ appartiendra à l'arc ANCBM′;

et en désignant par a l'arc positif AM, le premier de ces arcs sera représenté par $-2\pi+a$, et le second le sera par $-\pi-a$; et si nous ajoutons successivement à ces arcs une fois, deux fois, trois fois, etc., la circonférence négative -2π, nous aurons ces deux séries d'arcs négatifs :

$$-2\pi+a,\quad -4\pi+a,\quad -6\pi+a,\ \text{etc.},$$
$$-\pi-a,\quad -3\pi-a,\quad -5\pi-a,\ \text{etc.}$$

A l'égard des arcs négatifs des sinus P′N′ et PN, puisque l'arc positif ADBN′, qui détermine le point N′, est a, l'arc négatif ANN′, qui déterminera le même point, sera

$$\text{ANN}' = -2\pi+a.$$

Quant au point N, l'arc positif qui le détermine étant représenté par ABN, l'arc négatif sera la distance au point A prise en sens inverse, c'est-à-dire sera $-$AN ou $-a$, et alors on aura les deux séries suivantes, en ajoutant successivement -2π aux expressions $-2\pi+a$ et $-a$, qui les commenceront :

$$-2\pi+a,\quad -4\pi+a,\quad -6\pi+a,\ \text{etc.},$$
$$-a,\ -2\pi-a,\quad -4\pi-a,\quad -6\pi-a,\ \text{etc.};$$

et l'on voit qu'elles peuvent se déduire des termes généraux

$$-2n\pi+a,\quad -2n\pi-a,\ \text{etc.}$$

NOTE DEUXIÈME. (Page 14.)

Des tangentes d'arcs plus grands que la demi-circonférence.

Lorsque l'arc dépasse la demi-circonférence sans avoir atteint les $\frac{3}{4}$ de cette circonférence, la tangente redevient positive, puisque le rayon OM qui se termine à l'extrémité M de l'arc ne peut que rencontrer la tangente sur son prolongement; ce qui montre que la sécante OT (*fig.* 227) redevient positive. Fig. 227.

D'ailleurs, la formule (2) (page 6), dans laquelle le rayon r est pris pour unité, nous donne,

$$\operatorname{tang} a = \frac{-\sin a}{-\cos a}, \text{ quantité positive}$$

Enfin, lorsque le rayon a parcouru les trois quarts de la circonférence, la sécante prenant la direction OC est parallèle à la tangente AT′, qui devient l'infini négatif, puisque toutes les valeurs de la tangente qui ont lieu au dernier quadrans sont négatives; mais, lorsque l'extrémité de l'arc tombe entre les points C et A, la tangente AT′ et la sécante OT′ deviennent négatives et vont en décroissant.

La formule $\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ peut nous conduire à la même conclusion; car, pour l'arc $\frac{3}{4}2\pi$, le sinus et le cosinus étant respectivement -1 et 0, on a, dans notre hypothèse de $a = \frac{3}{2}\pi$,

$$\sin a = \sin \tfrac{3}{2}\pi = 1, \quad \cos \tfrac{3}{2}\pi = 0;$$

substituant ces valeurs dans celle de $\operatorname{tang} a$, nous trouverons

$$\operatorname{tang} \tfrac{3}{2}\pi = -\tfrac{1}{0} = -\infty.$$

Si dans les formules (3), (4) et (5) (pages 6 et 7), on donne au sinus, au cosinus et à la tangente les signes qui leur conviennent, suivant les arcs de cercle auxquels ils appartiennent, on pourra reconnaître facilement les signes qui doivent affecter la sécante, la cotangente et la cosécante qui répondent à ces différents arcs.

NOTE TROISIÈME. (Page 17.)

Seconde solution du problème de trouver le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs.

Fig. 228. Soit CD (*fig.* 228) le rayon des tables que nous prendrons pour unité,

$$AD = \operatorname{tang} a, \quad DB = \operatorname{tang} b,$$

nous aurons nécessairement

$$AC = \text{séc}\, a, \quad BC = \text{séc}\, b, \quad AB = \text{tang}\, a + \text{tang}\, b.$$

Outre ces lignes, nous avons encore CD, qui a pour expression AC cos a (art. 35), ou plutôt séc a cos a, en mettant la valeur de AC. Cela posé, nous avons

$$\text{aire du triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\text{AB} \times \text{CD} = \tfrac{1}{2}(\text{tang}\, a + \text{tang}\, b) \times \text{CD};$$

et, en mettant la valeur de CD,

$$\text{aire du triangle ABC} = \tfrac{1}{2}(\text{tang}\, a + \text{tang}\, b) \times 1;$$

d'une autre part, abaissant la perpendiculaire AE sur le côté CB, cette perpendiculaire aura pour expression

$$\text{AC} \sin \text{C};$$

et, en remplaçant AC par séc a et angle C par angle $(a + b)$, la perpendiculaire AE deviendra

$$\text{séc}\, a \sin(a + b),$$

et nous aurons cette autre expression de l'aire du triangle ABC:

$$\text{aire du triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\text{CB} \times \text{AE} = \tfrac{1}{2}\,\text{séc}\, b \times \text{séc}\, a \sin(a+b).$$

Égalant ces deux valeurs entre elles et supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$, il restera

$$\text{séc}\, b\ \text{séc}\, a \sin(a + b) = (\text{tang}\, a + \text{tang}\, b);$$

d'où l'on tirera

$$\sin(a + b) = \frac{\text{tang}\, a}{\text{sec}\, a\ \text{séc}\, b} + \frac{\text{tang}\, b}{\text{séc}\, b\ \text{séc}\, a} \ldots\ldots (a)$$

Or, en vertu des équations (2) et (3) (page 6), dans lesquelles $r = 1$, on obtiendra

$$\frac{\text{tang}\, a}{\text{séc}\, a} = \sin a, \quad \frac{1}{\text{séc}\, a} = \cos a. \ldots\ldots (b)$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (a) devient

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \ldots\ldots (c)$$

On trouverait avec la même facilité le sinus de la différence de

Fig. 229. deux arcs; car (*fig.* 229), représentant toujours le rayon par la droite CD, et supposant

$$\text{angle BCD} = a, \quad \text{angle ACD} = b,$$

nous avons

$$\text{aire du triangle ABC} = (\text{DB} - \text{DA}) \times \tfrac{1}{2}\text{CD},$$

ou

$$\text{aire du triangle ABC} = (\text{tang } a - \text{tang } b) \times \tfrac{1}{2},$$

et, en abaissant la perpendiculaire AE sur le côté CB du même triangle ABC, on a cette autre expression de la surface

$$\text{aire du triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{BC} \times \text{AE}; \ldots\ldots \quad (d)$$

or

$$\text{BC} = \text{séc } a, \quad \text{AE} = \text{CA} \sin(a - b) = \text{séc } b \sin(a - b).$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (d), on a

$$\text{aire du triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{séc } a\ \text{séc } b \sin(a - b).$$

Égalant entre elles ces deux surfaces et supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$, on obtient

$$\text{séc } a\ \text{séc } b \sin(a - b) = \text{tang } a - \text{tang } b;$$

d'où l'on tire

$$\sin(a - b) = \frac{\text{tang } a}{\text{séc } a\ \text{séc } b} - \frac{\text{tang } b}{\text{séc } a\ \text{séc } b}.$$

Réduisant cette équation au moyen des formules (b), nous obtiendrons

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \ldots\ldots \quad (c)$$

Quant aux valeurs de $\cos(a + b)$ et de $\cos(a - b)$, on les déduit facilement de celles de $\sin(a + b)$ et de $\sin(a - b)$;

Fig. 230. pour cet effet, soit AM (*fig.* 230) l'arc a, menons par le centre O les perpendiculaires NO sur OM et CO sur OA, les angles NOC et MOA seront égaux, comme ayant le même

complément COM; l'égalité de ces angles suffit pour prouver celle des triangles rectangles NQO, MOE, dont les hypoténuses sont égales, comme rayons; donc

$$QO = OE, \quad NQ = ME,$$

ou, à cause des parallèles égales

$$NP = OE, \quad OP = ME; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

or, le sinus d'un angle obtus étant le même que celui de son supplément, on voit que NP et OP sont les sinus et cosinus de l'angle obtus NOA, et que ce dernier, tombant sur le prolongement de OA, doit être négatif. Les équations (f) nous donnent donc

$$\sin NOA = \cos a, \quad \cos NOA = -\sin a; \quad \ldots \quad (g)$$

et, en observant que l'arc NA, qui est la mesure de l'angle NOA, équivaut à $90^\circ + a$, les équations (f) reviennent à

$$\sin(90^\circ + a) = \cos a, \quad \cos 90^\circ + a = -\sin a. \quad (h)$$

Faisons $a = a + b$, et substituons cette valeur dans la première formule des équations (h), nous obtiendrons

$$\sin(90^\circ + a + b) = \cos(a + b); \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

changeons ensuite a en $90^\circ + a$ dans la formule (c) démontrée plus haut, on trouvera

$$\sin(90^\circ + a + b) = \sin(90^\circ + a)\cos b + \sin b \cos(90^\circ + a); \ldots \quad (j)$$

remplaçons les quantités renfermées entre les parenthèses par leurs valenrs tirées des équations (i) et (h), on tombera sur la formule connue

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

A l'égard du cosinus de la différence, pour le trouver appelons a l'arc MC (*fig.* 230), nous aurons

$$\text{arc CA} - \text{arc CM} = \text{arc MA};$$

et, par conséquent,

$$\sin(90^\circ - a) = \cos a, \quad \cos(90^\circ - a) = -\sin a; \quad (k)$$

nous faisons précéder le sinus du signe négatif, parce que ce sinus, représenté par MQ ou plutôt par OP, tombe sur le prolongement de OA.

Changeant a en $a - b$ dans les équations (k), nous aurons

$$\sin(90^\circ - a + b) = \cos(a - b), \cos(90^\circ - a + b) = \sin(a - b); \ldots (l)$$

remplaçant ensuite a par $90^\circ + a$ dans la formule (e), cette formule deviendra

$$\sin(90^\circ - a + b) = \sin(90^\circ - a)\cos b - \cos(90^\circ - a \sin b);$$

éliminant les quantités comprises entre les parenthèses, au moyen de la première des équations (l) et des équations (k), nous obtiendrons

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

NOTE QUATRIÈME. (Page 20.)

Fig. 231. *Le rayon d'un cercle étant donné* (fig. 231), *trouver le côté d'un polygone régulier inscrit à ce cercle d'un nombre quelconque de côtés.*

Nous commencerons par l'heptagone, parce que l'équation est plus simple.

La solution de ce problème dépend de celle-ci : Un triangle scalène étant inscrit dans un cercle, déterminer le rayon de ce cercle en fonction des trois côtés du triangle.

Pour cet effet, menons par le sommet de l'angle B (*fig.* 231) la perpendiculaire BD sur le côté opposé à cet angle, et par le centre O la parallèle FE à BD; cette parallèle étant une per-

pendiculaire abaissée du centre sur la corde AC, passera par le milieu E de cette corde; enfin, si du centre on abaisse également la perpendiculaire OG sur le côté AB, elle rencontrera également ce côté à son milieu G. Cela posé, soient

$$CB = 2a, \quad AC = 2b, \quad AB = 2c, \quad AD = x, \quad DB = y.$$

Les triangles rectangles CBD, ADB nous donneront

$$AD^2 + DB^2 = CB^2, \quad CD^2 + DB^2 = CB^2,$$

ou $$x^2 + y^2 = 4a^2, \quad (2b - x)^2 + y^2 = 4c^2;$$

éliminant y entre ces équations, on a

$$x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

La valeur de y se trouve encore plus facilement, car le triangle rectangle ADB nous donne

$$DB^2 = CB^2 - CD^2,$$

ou $$y^2 = 4c^2 - x^2,$$

et, en passant à la racine,

$$y = \sqrt{4c^2 - x^2}; \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

d'un autre côté, les triangles rectangles ADB, AEF qui ont l'angle A commun donnent ces proportions

$$BD : AB :: EF : AF, \quad BD : AD :: EF : AE,$$

ou, parce que AE est la moitié du côté $2b$,

$$y : 2C :: EF : AF, \quad y : x :: EF : b;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a

$$y . AF = 2c . EF, \quad by = x \times EF; \ldots\ldots (c)$$

éliminant EF entre ces équations, on obtient

$$AF = \frac{2cb}{x}, \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

et la seconde des équations (c) nous donne

$$EF = \frac{by}{x}.$$

Ces valeurs de AF et de EF, qui sont ainsi déterminées en fonctions de quantités dont nous avons les valeurs, vont nous servir à nous faire connaître GF. En effet, les triangles IFA, GOF rectangles en E et en G, ayant l'angle commun F, sont semblables, et donnent la proportion

$$GF : GO :: EF : AE;$$

mais à cause de la similitude des triangles AEF, ADB, le rapport de EF à AE est le même que celui de DB à AD.

Substituant ce dernier rapport dans notre proportion, nous aurons

$$GF : GO :: DB : AD,$$

ou

$$AF - AG : GO :: y : x;$$

mettant pour AF la valeur déterminée par l'équation (d), et observant que $AG = c$, parce que la perpendiculaire OG abaissée du centre partage la corde AB en deux parties égales, notre dernière proportion deviendra

$$\frac{2cb}{x} - c : GO :: y : x,$$

ou

$$\frac{2eb - cx}{x} : GO :: y : x;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on trouvera

$$y . GO = 2eb - cx,$$

et mettant a en facteur commun, et divisant par y, on obtiendra

$$GO = \frac{c(2b - x)}{y};$$

remplaçant y par sa valeur, donnée par l'équation (b), on aura

$$\mathrm{GO} = \frac{c\,(2b - x)}{\sqrt{4c^2 - x^2}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

maintenant il est facile de voir que si nous désignons par r le rayon du cercle, on pourra obtenir la valeur de ce rayon en fonction de x au moyen de cette équation

$$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{AG}^2 + \mathrm{GO}^2,$$

ou

$$r^2 = c^2 + \frac{c^2\,(2b - x)^2}{4c^2 - x^2};$$

réduisant le second membre au même dénominateur, supprimant les termes qui se détruisent, et mettant ensuite $4c^2$ en facteur commun, on trouve

$$r^2 = \frac{4c^2\,(c^2 + b^2 - bx)}{4c^2 - x^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

mais l'équation (a) nous donne

$$c^2 + b^2 - bx = a^2;$$

substituant cette valeur dans l'équation (f), cette équation devient

$$r^2 = \frac{4a^2c^2}{4c^2 - x^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

A l'égard du dénominateur qui contient encore x, si l'on y met la valeur de cette inconnue tirée de l'équation (a), le second membre de l'équation (g) deviendra

$$4c^2 - x^2 = 4c^2 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{b^2}, \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$4c^2 - x^2 = \frac{4c^2b^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{b^2};$$

élevant au carré la quantité qui est entre les parenthèses, et réduisant, il restera

$$4c^2 - x^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{b^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (g), on obtiendra

$$r^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

Les lettres a, b, c qui entrent dans cette formule n'indiquent que les moitiés des côtés du triangle. Si nous voulons avoir les côtés entiers, en désignant ces côtés par les lettres a', b', c', nous aurons

$$a = \frac{a'}{2}, \quad b = \frac{b'}{2}, \quad c = \frac{c'}{2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (i), et supprimant le diviseur commun 4, il restera

$$r^2 = \frac{a'^2b'^2c'^2}{2a'^2b'^2 + 2a'^2c'^2 + 2b'^2c'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^2},$$

ou, en supprimant les accents, dès que nous adoptons a, b, c pour les côtés du triangle et non pour leurs moitiés,

$$r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (j)$$

Si deux côtés du triangle sont égaux, par exemple b et c, en faisant $b = c$, l'équation (j) se réduit à

$$r^2 = \frac{b^4}{4b^2 - a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Si les trois côtés sont égaux, la même équation nous donne

$$r^2 = \frac{a^2}{3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Les équations (k) et (l) peuvent nous fournir les moyens de trouver facilement les équations des polygones réguliers inscrits de sept et de neuf côtés. En effet, soit (*fig.* 232) un heptagone régulier inscrit dans un cercle. Ayant mené par les points A, B, C les trois cordes AB, CB, CA, les cordes AC et CB, soutenant deux arcs égaux, sont égales : représentons-les par c' et c'', et nommons c''' la corde AB qui soutend un arc triple ; si nous pouvons déterminer $c' = c''$ et c''' en fonction de la corde c et du rayon r, il ne s'agira plus, pour avoir l'équation du polygone de sept côtés, que d'exprimer c' et c''' en fonction de c et de r, et d'en substituer la valeur dans l'équation (k). Fig. 232.

Pour avoir $c' = c''$ en fonction de c et de r, le triangle rectangle ADE nous donne

$$AE^2 = AD^2 - DE^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

or

$$AE = \frac{AC}{2} = \frac{c'}{2};$$

et la corde étant moyenne proportionnelle entre le diamètre $2r$ et le segment DE, nous avons

$$DE = \frac{c^2}{2r},$$

substituant ces valeurs dans l'équation (m), nous obtiendrons

$$\frac{c'^2}{4} = c^2 - \frac{c^4}{4r^2},$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$c'^2 \quad \text{ou} \quad c''^2 = \frac{4c^2r^2 - c^4}{r^2}. \ (*) \ldots\ldots (n)$$

A l'égard de la corde AB qui soutend un arc triple (*fig.* 233), nous avons Fig. 233.

$$AH^2 = AL^2 + LH^2,$$

$$BH^2 = LB^2 + LH^2;$$

(*) Observons que l'équation (k), déduite de l'équation générale (j), rentre dans l'équation (n) trouvée directement, où l'on changerait b en c et q^2 en c^2.

retranchant la seconde équation de la première, il reste

$$AH^2 - BH^2 = AL^2 - BL^2,$$

ou $$AH^2 - BH^2 = (AL + BL) \times (AL - BL).$$

Mettant les valeurs de ces lignes, et observant que $AL + BL = AB$, on trouvera

$$AH^2 - BH^2 = AB\,(AL - BL),$$

ou $$c''^2 - c^2 = c'''\,(AL - BL) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Or $$AL = AK + KL, \quad \text{et} \quad BL = AK;$$

donc $$AL - BL = KL = c.$$

Cette valeur réduit l'équation (o) à

$$c''^2 - c^2 = c'''c,$$

d'où l'on tire

$$c''' = \frac{c''^2 - c^2}{c},$$

et, en divisant chaque terme par c,

$$c''' = \frac{c''^2}{c} - c. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

Cette équation nous fournira le moyen de passer de la soutendante c'' à une soutendante c''', qui contient une corde c de plus. Ainsi, en mettant la valeur de c''^2, donnée par l'équation (n), nous trouverons

$$c''' = \frac{4c^2r^2 - c^4}{cr^2} - c,$$

réduisant au même dénominateur, et supprimant le facteur commun c, on obtiendra,

$$c''' = \frac{3cr^2 - c^3}{r^2} \text{ (*)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

(*) On pourrait déduire cette équation de l'équation (117) (page 98), en changeant a en c''' et x en c.

Pour déterminer l'équation de l'heptagone, menons dans ce polygone (*fig.* 232) les cordes égales AC, BC qui soutendent chacun deux côtés de l'heptagone, et une corde AB qui soutende trois côtés, nous aurons Fig. 232.

$$c''^2 = b^2, \quad c''' = a;$$

par conséquent, les équations (n) et (q) nous donneront

$$b^2 = \frac{4c^2r^2 - c^4}{r^2}, \quad a = \frac{3cr^2 - c^3}{r^2}; \quad \ldots\ldots (r)$$

valeurs qu'il faut substituer dans la formule (k), écrite ainsi :

$$b^4 = r^2(4b^2 - a^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (s)$$

Pour cet effet, la première des équations (r), élevée au carré, devient

$$b^4 = \frac{16c^4r^4 - 8c^6r^2 + c^8}{r^4};$$

d'une autre part, nous avons pour le 1er terme compris entre les parenthèses de l'équation (s),

$$4b^2 = \frac{16c^2r^2 - 4c^4}{r^2} = \frac{16c^2r^4 - 4c^4r^2}{r^4},$$

et la seconde des équations (r) nous donne

$$a^2 = \frac{9c^2r^4 - 6c^4r^2 + c^6}{r^4};$$

introduisant ces valeurs dans la formule (s), effaçant le diviseur r^4, et supprimant ensuite le facteur commun c^2, nous obtiendrons

$$\frac{16c^4r^4 - 8c^6r^2 + c^8}{16c^2r^4 - 4c^4r^2 - 9c^2r^4 + 6c^4r^2 - c^6} = r^2.$$

Chassant le dénominateur, réduisant et ordonnant par rap-

port à c, on trouvera, pour l'équation de l'heptagone,

$$c^6 - 7c^4r^2 + 14c^2r^4 - 7r^6 = 0.$$

L'équation de l'ennéagone s'obtiendra encore plus aisément; car si l'on mène, dans ce polygone, trois cordes qui soutiennent chacun trois côtés, et qu'on représente l'une de ces cordes égales par a, il faudra supposer

$$a = \frac{3cr^2 - c^3}{r^2}$$

dans la formule (l), et l'on trouvera

$$c^6 - 6c^4r^2 + 9c^2r^4 - 3r^6 = 0.$$

Si, dans les équations de l'heptagone et de l'ennéagone, nous prenons le rayon pour unité, elles deviendront

$$c^6 - 7c^4 + 14c^2 - 7 = 0, \quad c^6 - 6c^4 + 9c^2 - 3 = 0;$$

et si l'on fait $c^2 = d$, nous les convertirons en celles-ci :

$$d^3 - 7d^2 + 14d - 7 = 0, \quad d^3 - 6d^2 + 9d - 3 = 0.$$

Ces équations du 3e degré, étant résolues à la manière ordinaire, détermineront la valeur de d. A l'égard de celle de c, le double signe qui l'affecte indique que le côté c peut tomber à droite ou à gauche; lors donc que le choix sera fait, c n'aura plus qu'une valeur en d.

Le même procédé qui nous a conduit à l'équation (p) peut servir à trouver les soutendantes de quatre, de cinq côtés, etc.; car, en continuant de désigner par les accents de c le nombre de cordes égales soutenues, et en opérant comme nous l'avons fait pour la soutendante de trois côtés, c'est-à-dire en retranchant l'une de ces équations de l'autre, et en décomposant le second membre en deux facteurs à l'aide de la formule

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de la soutendante de quatre

côtés égaux, nous aurons (*fig.* 234), Fig. 234.

$$AH^2 = AL^2 + LH^2,$$

$$HB^2 = BL^2 + LH^2;$$

d'où nous déduirons, en retranchant la seconde équation de la première,

$$AH^2 - HB^2 = AL^2 - BL^2;$$

et, en décomposant le second membre en deux facteurs, à l'aide de la formule (t), il viendra

$$AH^2 - HB^2 = (AL + BL)(AL - BL);$$

observons que AL + BL n'est autre chose que la ligne AB (*fig.* 234), et que AL — BL équivaut à KL, et par conséquent à GH.

L'équation précédente devient donc

$$AH^2 - HB^2 = AB \times GH,$$

ou, en mettant les valeurs de ces lignes,

$$c'''^2 - c^2 = c^{\text{IV}} \times c'';$$

d'où nous déduirons

$$c^{\text{IV}} = \frac{c'''^2 - c^2}{c''}.$$

A l'égard de la soutendante de cinq côtés, nous la déterminerons au moyen de la *fig.* 233, en remplaçant AB par DE, GK et HL par GM et HN, et AG et BH par DAG et EBH; en opérant comme ci-dessus, nous trouverons

$$c^{\text{V}} = \frac{c''' - c''^2}{c},$$

et ainsi de suite pour les soutendantes d'un plus grand nombre de côtés. En résumé, nous avons pour celles

de 2 *cordes*, $c''^2 = \frac{4c^2r^2 - c^4}{r^2}$; *de* 3 *cordes*, $c''' = \frac{c'' - c^2}{c}$;

de 4 *cordes*, $c^{\text{IV}} = \frac{c'''^2 - c^2}{c''}$; *de* 5 *cordes*, $c^{\text{V}} = \frac{c'''^2 - c''^2}{c}$;

etc.;

de sorte que lorsqu'on aura une soutendante d'un nombre n de cordes égales, on trouvera immédiatement la soutendante d'un nombre $n+1$, et l'on introduira dans ces soutendantes les valeurs de c'', de c''', de c^{IV}, etc., en fonction de c, d'après les formules précédentes.

Maintenant, pour avoir l'équation d'un polygone d'un nombre n de côtés, je partage ce nombre n en trois parties m, p, q; et, dans l'équation (j), je substitue aux côtés a, b, c trois cordes, l'une soutendant un nombre m de côtés, l'autre un nombre p, et la troisième un nombre q.

L'équation (k) peut nous faire parvenir encore plus promptement au même résultat, en partageant le nombre n en trois parties, dont les deux premières soient égales entre elles.

Quant au cas de l'équation (l), il n'arrive que lorsque le nombre n est divisible par 3.

Nous terminerons cette note en démontrant que le dénominateur de l'équation (j) peut se décomposer en facteurs simples du premier degré. Pour cet effet, changeons momentanément les signes de ce dénominateur, et mettons $2a^2$ en facteur commun, nous aurons

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2(b^2 + c^2) - 2b^2c^2. \qquad (u)$$

Observant que $a^4 - 2a^2(b^2 + c^2)$ sont les deux premiers termes d'un carré qui a pour expression

$$a^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2,$$

ou, en développant,

$$a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4.$$

Si l'on compare ce carré à l'expression (u), à laquelle on joindra $2b^2c^2 - 2b^2c^2$, nous pourrons la mettre sous cette forme

$$(a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4) - 4b^2c^2;$$

et, en indiquant seulement le carré, elle deviendra

$$[a^2 - (b^2 + c^2)]^2 - 4b^2c^2,$$

quantité qui, étant la différence de deux carrés, pourra se décomposer ainsi :

$$[a^2 - (b^2 + c^2) - 2bc]\,[a^2 - (b^2 + c^2) + 2bc)\,; \quad . \quad . \quad (v)$$

écrivons le premier facteur de la sorte :

$$a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)\,;$$

ou, parce que ce qui est entre les parenthèses est un carré parfait,

$$a^2 - (b + c)^2\,;$$

cette différence des deux carrés peut donc se décomposer ainsi :

$$(a + b + c)\,(a - b - c).$$

A l'égard du second facteur de l'expression (v), écrivons-le de cette manière :

$$a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$

ce qui revient à

$$a^2 - (b - c)^2\,;$$

et, comme nous avons encore là une différence de carrés, nous décomposerons ainsi ce second facteur

$$(a + b - c)\,(a - b + c)\,;$$

remplaçons les deux facteurs de l'expression (v) par les valeurs que nous venons de trouver, cette expression deviendra

$$(a + b + c)\,(a - b - c)\,(a + b - c)\,(a + c - b).$$

En changeant les signes de l'un des facteurs (ceux du second par exemple), le produit deviendra d'un signe contraire; par conséquent, nous rétablirons les signes que nous avons changés dans le dénominateur du second membre de l'expression (j), et nous aurons, pour ce dénominateur,

$$(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c)\,;$$

nous voyons que la partie négative du second, du troisième et du quatrième de ces quatre facteurs est successivement a, b, c.

NOTE CINQUIÈME. (Page 22.)

Déterminer le sinus et l'arc de 3 degrés.

Il existe deux sinus de petits arcs faciles à déterminer : ce sont ceux de 18 degrés et de 15 degrés. Lorsqu'on les a obtenus, ainsi que leurs cosinus, les formules (24) et (25), prises avec le signe inférieur, nous feront trouver le sinus et le cosinus de leur différence, c'est-à-dire ceux qui appartiennent à un arc de 3 degrés. Pour parvenir au premier de ces sinus, remarquons que la moitié du côté du décagone régulier étant le sinus de la vingtième partie de la circonférence, comme ce sinus est de 18 degrés, nous obtiendrons, d'après l'art. **143**,

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}r\sqrt{5}\right) \text{ (*)},$$

ou

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}r\left(-1 + \sqrt{5}\right) \ldots\ldots\ldots (a)$$

Le cosinus d'un angle étant donné par la formule (1) (page 6), nous déduirons de cette formule

$$\cos 18^\circ = \sqrt{r^2 - \sin^2 18^\circ} \ldots\ldots\ldots (b)$$

Nous ne prenons le radical qu'avec le signe positif, parce que nous supposons que le cosinus tombe à droite; et comme nous devons remplacer le second terme du radical de l'équation (b) par le carré du sinus de l'équation (a), nous trouverons

$$\sin^2 18^\circ = \tfrac{1}{16}r^2\left(6 - 2\sqrt{5}\right),$$

ou

$$\sin^2 18^\circ = r^2\left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right); \ldots\ldots\ldots (c)$$

(*) On a vu (art. **144**) ce que signifie la seconde valeur du radical.

introduisant cette valeur sous le radical de l'équation (*b*), on a

$$\cos 18^\circ = \sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{8} + \frac{r^2}{8}\sqrt{5}};$$

mettant r^2 en dehors du signe, on obtient

$$\cos 18^\circ = \tfrac{1}{4} r \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

A l'égard du sinus de 15 degrés, nous avons vu (art. 40) que le sinus de 30 degrés était égal à la moitié du rayon; on a donc

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} r;$$

substituant cette valeur dans la formule (1) (page 6), et réduisant, nous trouverons

$$\cos 30^\circ = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} r^2},$$

ou

$$\cos 30^\circ = r\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3};$$

mettant cette valeur de cos 30 degrés à la place de cos *a* dans l'équation (30) (page 18), c'est-à-dire dans celle-ci,

$$(\sin \tfrac{1}{2} a)^2 = \tfrac{1}{2} r (r - \cos a),$$

nous aurons

$$\sin^2 15^\circ = \tfrac{1}{2} r^2 (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}),$$

ou

$$\sin^2 15^\circ = \tfrac{1}{4} r^2 (2 - \sqrt{3}), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

et en extrayant la racine carrée,

$$\sin 15^\circ = \tfrac{1}{2} r \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

D'un autre côté, si la valeur du carré du sinus de 15 degrés est substituée dans la formule

$$\cos a = \sqrt{r^2 - \sin^2 a},$$

tirée de l'équation (1) (page 6), on trouvera

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}\sqrt{3}},$$

ou

$$\cos 15^\circ = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}};$$

substituant ces quatre valeurs des sinus et cosinus de 18 et de 15 degrés dans la formule (24), prise avec le signe inférieur, nous obtiendrons

$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{8}\, r(-1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{3}} - \tfrac{1}{8}\, r\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

On pourrait aussi déterminer l'arc ou l'angle de 3 degrés ; car le côté de l'hexagone correspondant à un angle de 60 degrés, et celui du décagone à un angle de 36 degrés, si l'on retranche l'un de ces angles de l'autre, on aura l'angle, et par conséquent l'arc de 24 ; et en divisant cet arc de moitié en moitié, on parviendra, par le moyen de la simple géométrie, c'est-à-dire sans employer autre chose que la règle et le compas, à l'arc de 3 degrés.

NOTE SIXIÈME. (Page 31.)

Démontrer que la différence du sinus à l'arc est moindre que le cube de cet arc.

En prenant une limite moindre que celle que nous avons donnée (art. 48), et nous bornant seulement à démontrer que la différence du sinus à l'arc est moindre que le cube de l'arc, on parviendrait encore à une approximation très-grande de la valeur du sinus. En effet, dès qu'il est prouvé (art. 48) que l'arc est moindre que la tangente, nous aurons donc

$$a < \text{tang}\ a\,;$$

et en représentant par le nombre positif δ la différence, on peut

établir cette équation :

$$a + \delta = \tang a,$$

ou

$$a + \delta = \frac{\sin a}{\cos a};$$

en chassant le dénominateur,

$$a \cos a + \delta \cos a = \sin a;$$

et, en multipliant par $\cos a$,

$$a \cos^2 a + \delta \cos^2 a = \sin a \cos a.$$

Mais $\cos a$ étant moindre que le rayon que nous prenons pour unité, $\sin a$ surpassera $\sin a \cos a$; nous regarderons donc $\cos a$ comme une fraction qui tend à diminuer la valeur de $\sin a$; par conséquent, en remplaçant le second membre de cette équation par $\sin a$, il faudra, pour maintenir l'égalité, augmenter le premier membre d'une certaine quantité positive ε, et nous aurons

$$a \cos^2 a + \delta \cos^2 a + \varepsilon = \sin a;$$

et en remplaçant $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, nous aurons

$$a (1 - \sin^2 a) + \delta \cos^2 a + \varepsilon = \sin a;$$

on tire de là, en effectuant la multiplication indiquée par a et en transportant $\sin a$ dans le premier membre, et $a \sin^2 \alpha$ dans le second :

$$a - \sin a + \delta \cos^2 a + \varepsilon = a \sin^2 a;$$

supprimant la partie $\delta \cos^2 a + \varepsilon$, qui est essentiellement positive, il restera

$$a - \sin a < a \sin^2 a;$$

et comme a^3 est plus grand que $a \sin^2 a$, parce que l'arc surpasse le sinus, on aura, à plus forte raison,

$$a - \sin a < a^3.$$

Si, pour opérer sur moins de décimales, la valeur de a, exprimée par l'équation (56), est réduite à

$$1' = 0,000291;$$

nous trouverons

$$a^3 \text{ ou } 1'^3 = 0,000000000024641;$$

et l'on voit qu'on peut regarder la différence du sinus à l'arc comme nulle, si l'on ne prend pas plus de 10 décimales.

NOTE SEPTIÈME. (Page 37.)

Moyen d'exprimer en petits nombres une fraction comprise entre deux autres.

La manière ordinaire de trouver une fraction comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, en les réduisant d'abord au même dénominateur, conduisant à des fractions exprimées en chiffres trop forts, je me suis servi de ce moyen très-simple pour ne pas tomber dans cet inconvénient.

Ayant adopté un nombre qui s'écarte peu des dénominateurs 2 et 3, le nombre 7 par exemple, je représente par x le numérateur qui aurait 7 pour dénominateur, et j'écris ainsi mes trois fractions :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{x}{7}, \quad \frac{1}{3},$$

opérant comme si je voulais les réduire au même dénominateur, j'obtiens pour les numérateurs

$$21, \quad 6x, \quad 14,$$

et je vois qu'il n'y a pour x que la valeur 3 qui rende $6x$ plus grand que 14 et moindre que 21, d'où je conclus que la fraction cherchée est $\frac{3}{7}$.

NOTE HUITIÈME. (Page 38.)

Parvenir à la série convergente qui donne le logarithme de $x+1$, et procédé pour rendre logarithmique une formule qui se présente sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Pour trouver le logarithme de $1+x$, on cherchera d'abord le développement de $\log(1+x)$ en égalant ce logarithme à une suite de termes ordonnés suivant les puissances ascendantes de x, et l'on aura

$$\log(1+x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

Faisant $x = 0$, cette équation nous donnera

$$\alpha = \log 1.$$

Mais le logarithme de 1 étant 0, on voit qu'il n'y a point de terme constant dans le développement de $\log(1+x)$; il est donc de la forme

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}; \ldots \quad (a)$$

changeant x en z, on aura pareillement

$$\log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}; \ldots \quad (b)$$

z étant arbitraire, nous pourrons supposer qu'il y a entre x et z la relation

$$(1+x)^2 = 1+z;$$

ou, en développant,

$$1 + 2x + x^2 = 1 + z;$$

d'où l'on tire

$$z = 2x + x^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b), nous trouverons

$$\log(1+x) = A(2x+x^2) + B(2x+x^2)^2 + C(2x+x^2)^3 + \text{etc.}$$

ceux qui dérivent de l'équation

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \ldots\ldots (g)$$

Ces logarithmes portent aussi le nom de Néper, leur inventeur, ou celui d'hyperboliques, par une raison que nous avons expliquée en parlant de l'hyperbole.

Si, à l'aide de l'équation (g), nous éliminons la quantité qui est entre les parenthèses dans l'équation (f), nous trouverons

$$\log \textit{tabulaire de } (x+1) = \text{A} \times \log \textit{népérien de } (x+1) \ldots (h)$$

Occupons-nous maintenant du logarithme népérien représenté par l'équation (g). Les termes du second membre de cette équation étant alternativement positifs et négatifs, nous voyons que la valeur de $\log(x+1)$ n'est pas aussi convergente que si ces termes conservaient le même signe. Cherchons donc à faire en sorte que tous ces termes soient positifs. Pour parvenir à ce but, x étant quelconque, remplaçons sa valeur par $-x$, l'équation (g) deviendra

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.}$$

et, en retranchant cette équation de l'éq. (g), nous obtiendrons

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right) \ldots (i)$$

et comme, par la nature des logarithmes (art. 69),

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x},$$

on aura, parce que x est facteur commun du second membre de l'équation (i),

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \text{etc.}\right) \ldots (j)$$

Nous pouvons disposer de la variable x par une condition : la

plus simple est celle-ci

$$\frac{1+x}{1-x}=z,$$

d'où nous tirerons

$$x=\frac{z-1}{z+1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (j), nous aurons

$$\log z=2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\left[\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^4+\left(1+\frac{1}{7}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^5 \text{etc.},\right]\ldots(k)$$

et l'on voit que le logarithme de z dépend ici de celui de deux nombres, l'un immédiatement au-dessous et l'autre immédiatement au-dessus du nombre proposé z; mais il serait plus avantageux qu'il ne dépendît que de $z-1$, parce que le logarithme d'un nombre $z-1$ étant trouvé, en augmentant successivement ce nombre d'une unité, on aurait tous les logarithmes au-dessus. On parviendra à ce but en supposant dans l'équation (j)

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{z}{z-1}.$$

On tire de celle-ci, en réduisant,

$$x=\frac{1}{2z-1}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (j), on trouverait

$$\log\frac{z}{z-1}=\frac{2}{2z-1}\left[1+\frac{1}{3(2z-1)^2}+\frac{1}{5(2z-1)^4}+\frac{1}{7(2z-1)^6}+\text{etc.}\right],$$

ou, d'après la propriété des logarithmes (art. 62), équa-

tion (66),

$$\log z - \log(z-1) = \frac{2}{2z-1}\left[1 + \frac{1}{3(2z-1)^2} + \frac{1}{5(2z-1)^4} + \text{etc.}\right],$$

et enfin

$$\log z = \log(z-1) + \frac{2}{2z-1}\left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3(2z-1)^2} \\ \quad + \frac{1}{5(2z-1)^4} + \text{etc.} \end{array}\right] \ldots (l)$$

Pour déterminer le logarithme népérien ou hyperbolique de 2 à l'aide de cette formule, on supposera $z = 2$, et alors on aura

$$\log(z-1) = \log 1 = 0, \text{ et } 2z - 1 = 3;$$

par conséquent, l'équation (l) deviendra

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3(3)^2} + \frac{1}{5(3)^4} + \frac{1}{7(3)^6} + \frac{1}{9(3)^8}\right], \text{ etc.},$$

et l'on trouvera

$$\log 2 = 0{,}69314718; \ldots\ldots\ldots (m)$$

doublant ce logarithme, on aura celui de 4; et, en faisant $z = 5$, et, par conséquent, $z - 1 = 4$, la formule (l) donnera pour le logarithme népérien de 5,

$$\log 5 = 2 \log 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \frac{1}{7.9^6} + \text{etc.}\right),$$

et le résultat du calcul sera

$$\log 5 = 1{,}60943791.$$

Ajoutant le logarithme népérien de 2 à celui de 10, on aura

$$\log \text{ népérien de } 10 = 2{,}302585\,09.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (h), et celle du logarithme tabulaire de 10 qui est l'unité, on a donc

$$1 = A\,(2{,}302585\,09\ldots\ldots),$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{1}{2,30258509},$$

et par conséquent

$$A = 0,43429448.$$

Tel est le nombre qu'on appelle le *module*, et par lequel il faut multiplier un logarithme pris dans le système népérien si l'on veut passer à un logarithme tabulaire.

Pour donner une application de la transformation d'un logarithme népérien en logarithme tabulaire, nous avons trouvé [équation (m)], que le logarithme népérien de 2 était 0,69314718. Si l'on multiplie ce logarithme par le module 0,43429449, on trouvera 0,30102999 pour le logarithme tabulaire du nombre 2, logarithme dans lequel, en se bornant à 7 décimales, on a supprimé la dernière et remplacé 2999 par 3000.

Réciproquement, pour passer d'un logarithme tabulaire au logarithme népérien du même nombre, il faut diviser le premier par 0,434 294 49, ou, ce qui est la même chose, il faut le multiplier par 2,302 585 09. Ce nombre 0,434 294 49 est le logarithme tabulaire du nombre 2,718 281 8 qu'on a coutume de représenter par la lettre e.

En effet, si e est la base du système népérien, et qu'on représente par L un logarithme pris dans ce système, nous aurons donc pour un nombre a

$$a = e^{La};$$

on tire de là, en désignant par l le logarithme dans le système tabulaire,

$$la = le^{La}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

et par la nature des logarithmes,

$$la = La\, le;$$

d'où l'on tire

$$\frac{la}{La} = le. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Mais, en faisant $x + 1 = a$ dans l'équation (h), on tire de cette équation

$$la = \mathrm{A}\mathrm{L}a,$$

et par conséquent

$$\mathrm{A} = \frac{la}{\mathrm{L}a}.$$

Ce rapport des deux logarithmes étant substitué dans l'équation (o), on obtient

$$\mathrm{A} = le.$$

Il est à observer que, lorsqu'au lieu de prendre les logarithmes dans les tables, on les prend dans le système népérien, l'équation (n) devient

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}e^{\mathrm{L}a},$$

et par conséquent donne

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}a\,\mathrm{L}e;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{L}e = \frac{\mathrm{L}a}{\mathrm{L}a};$$

ce qui montre que le logarithme népérien du nombre e est l'unité.

Ceci sert quelquefois, dans la haute analyse, à déterminer une formule de logarithmes; en effet, si l'on avait, par exemple, cette équation, dans laquelle le logarithme appartient au système népérien,

$$\log \frac{a^3 + b^3}{3r} = na,$$

on l'écrirait ainsi

$$\log \frac{a^3 + b^3}{3r} = na \log e,$$

ce qui n'en changerait pas la valeur, puisque, dans le système népérien, le logarithme du nombre e est l'unité, et l'on aurait,

d'après la propriété des logarithmes (art. 64),

$$\log \frac{a^3 + b^3}{3r} = \log e^{na};$$

passant au nombre, il resterait

$$\frac{a^3 + b^3}{3r} = e^{na}.$$

Nous terminerons cette matière en donnant les moyens de rendre logarithmique une expression qui ne se présente pas sous la forme d'un produit; par exemple, si l'on se proposait de trouver le logarithme de $9 + \sqrt{3}$, on sait qu'il faudrait préliminairement chercher en décimales la racine de 3 et y ajouter la valeur de 9 avant de trouver le logarithme cherché; tandis que, si nous eussions eu à trouver $9\sqrt{3}$, nous n'aurions point eu d'extraction de racine à chercher, et qu'en opérant par les tables, il eût suffi de prendre le tiers du logarithme de 3, et de l'ajouter à celui de 9 pour avoir le logarithme de $9\sqrt{3}$.

Qu'il soit question, par exemple, de rendre logarithmique la formule $a + b$. Pour cet effet, prenant le rayon pour unité, nous emploierons l'angle auxiliaire φ, qu'on apprendra bientôt à déterminer; supposant

$$b = a \operatorname{tang}^2 \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

on aura

$$a + b = a + a \operatorname{tang}^2 \varphi = a(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi),$$

et puisque (art. 8) la première des équations (6) me montre que $1 + \operatorname{tang}^2 \varphi$ équivaut au carré de la sécante, la valeur de $a + b$ deviendra

$$a + b = a \operatorname{séc}^2 \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Pour déterminer φ, l'équation (p) nous donnera

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = \frac{b}{a},$$

ou

$$(\text{tang}\,\varphi)^2 = \frac{b}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

La tangente qui entre dans cette formule appartenant au rayon 1, pour passer à celle des tables dont nous représenterons le rayon par R, nous aurons

1 : tang φ :: R : tang *des tables*, 1 : séc φ :: R : séc *des tables;*

donc

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang } \textit{des tables}}{\text{R}}, \quad \text{séc}\,\varphi = \frac{\text{séc } \textit{des tables}}{\text{R}}.$$

Substituant cette valeur dans les équations (p) et (q), en supposant maintenant que φ désigne la tangente des tables, on a

$$\left(\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{R}}\right)^2 = \frac{b}{a}, \quad \left(\frac{\text{séc}\,\varphi}{\text{R}}\right)^2 = \frac{a+b}{a}; \quad \ldots \quad (s)$$

appliquant les logarithmes à la première des équations (s) et observant que le logarithme de R est la caractéristique 10, nous obtiendrons

$$2 \log \frac{\textit{tang}\,\varphi}{\text{R}} = \log \frac{b}{a},$$

ou $$\log \text{tang}\,\varphi = \tfrac{1}{2}(\log b - \log a) + 10.$$

Le logarithme de tang φ étant déterminé par cette équation, on le cherchera dans les tables et l'on trouvera vis-à-vis celui de la sécante. La seconde des équations (s) nous conduirait au même résultat, mais exigerait de plus l'opération préliminaire de réunir a à b avant de prendre le logarithme de $a+b$ Partant de cette seconde des équations (s),

$$\left(\frac{\textit{sécante}\,\varphi}{\text{R}}\right)^2 = \frac{(a+b)}{a},$$

et passant aux logarithmes, on obtiendrait

$$\log \textit{sécante}\,\varphi = \tfrac{1}{2}[\log(a+b) - \log a] + 10.$$

Pour trouver le logarithme de $a - b$, on supposera

$$a \cos^2 \varphi = b \; ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

retranchant chaque membre de a, on trouvera, en mettant a en facteur commun,

$$a\,(1 - \cos^2 \varphi) = a - b,$$

ou

$$a \sin^2 \varphi = a - b \; ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (u)$$

et pour déterminer φ, l'équation (t) nous donnera

$$\cos^2 \varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

Nous rendrons les équations (u) et (v) applicables aux tables, en écrivant

$$(a - b) = a \left(\frac{\sin \varphi}{R}\right)^2, \quad \left(\frac{\cos \varphi}{R}\right)^2 = \frac{b}{a};$$

passant aux logarithmes, nous aurons

$$\log \sin \varphi = \tfrac{1}{2} \log (a - b) + 10, \quad \log \cos \varphi = \tfrac{1}{2} (\log b - \log a) + 10.$$

Nous déterminerons l'angle φ par la seconde de ces équations, et la première fera connaître le logarithme de $a - b$.

Si A et B sont des lignes trigonométriques, le même procédé peut servir. Cherche-t-on, par exemple, le logarithme de

$$\sin A - \cot B,$$

on supposera

$$\cot B = \sin A \sin^2 \varphi,$$

et l'on aura

$$\sin A - \cot B = \sin A\,(1 - \sin^2 \varphi),$$

ou

$$\sin A - \cot B = \sin A \cos^2 \varphi.$$

Ayant déterminé l'angle auxiliaire φ par l'équation

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cot B}{\sin A},$$

on opérera comme ci-dessus.

Enfin, si l'on a une somme de lignes trigonométriques, comme par exemple

$$\sin A + \text{séc}\, B - \text{tang}\, C, \text{ etc.}, \ldots\ldots \quad (\nu)$$

on supposera

$$\text{séc}\, B = \sin A \, \text{tang}^2 \varphi,$$

et l'on aura d'abord

$$\sin A + \text{séc}\, B = \sin A \, (1 + \text{tang}^2 \varphi),$$

ou

$$\sin A + \text{séc}\, B = \sin A \, \text{séc}^2 \varphi.$$

Remplaçant les trois premiers termes de l'équation (ν) par ceux-ci:

$$\sin A \, \text{séc}^2 \varphi - \text{tang}\, C,$$

et recourant à un second angle auxiliaire que nous désignerons par φ', nous supposerons

$$\text{tang}\, C = \sin A \, \text{séc}^2 \varphi \, \sin^2 \varphi',$$

et nous aurons

$$\sin A + \text{séc}\, B - \text{tang}\, C = \sin A \, \text{séc}^2 \varphi \, (1 - \sin^2 \varphi'),$$

ou plutôt

$$\sin A + \text{séc}\, B - \text{tang}\, C = \sin A \, \text{séc}^2 \varphi \, \cos^2 \varphi';$$

et à l'aide de nouveaux angles auxiliaires, nous continuerions d'opérer d'une manière analogue si nous avions un plus grand nombre de lignes trigonométriques.

NOTE NEUVIÈME. (Page 96.)

Trouver, par une construction graphique, le rapport approché du diamètre à la circonférence.

Les rapports approchés du diamètre à la circonférence ont l'inconvénient de faire trop dépendre l'opération graphique

du compas de proportion ou d'une échelle de parties égales; tandis qu'une construction géométrique par la règle et le compas peut s'exécuter sans instruments. Pour parvenir à une construction de ce genre, la recherche n'est pas aussi longue qu'elle le paraît d'abord, parce que les relations qui existent avec les côtés des polygones réguliers sont très-bornées. Tout se réduit à combiner des perpendiculaires et des parallèles avec ces côtés, parce que ce sont les seules lignes qui, amenant des triangles rectangles et des moyennes ou troisièmes proportionnelles, peuvent établir des rapports entre le rayon et les différentes lignes.

Prenons d'abord le rayon pour unité; il est naturel, de commencer par l'hexagone dont le côté est égal à cette unité, et, d'après notre observation précédente, d'abaisser la perpendiculaire OD (*fig.* 235) sur le côté CB de cet hexagone; Fig. 235. alors toutes les lignes calculables sont OD, AD et AB. Le triangle rectangle ODB, dans lequel DB est la moitié du rayon, nous donne

$$OD^2 = OB^2 - BD^2,$$

ou

$$OD^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4},$$

et, en tirant la racine carrée, nous avons

$$OD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

à l'égard de AD et de AB, les triangles rectangles AOB, BOD étant semblables, parce qu'ils ont chacun un angle commun, il en résulte que les troisièmes angles OAB et OBD sont égaux. L'égalité de ces angles prouve la similitude des triangles rectangles ADB, ODB, qui nous donnent la proportion

$$OD : BD :: BD : AD, \quad OD : OB :: BD : AB,$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} : \tfrac{1}{2} :: \tfrac{1}{2} : AD, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3} : 1 :: \tfrac{1}{2} : AB;$$

donc

$$AD = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad AB = \frac{1}{\sqrt{3}} \ (*),$$

et, en multipliant les deux termes de ces fractions par $\sqrt{3}$, et réunissant aux valeurs de OD, de AD celle de AB, nous obtiendrons

$$OD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad AB = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ldots, \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{6}, \ldots \ (a)$$

et, en extrayant la racine de 3 jusqu'à la huitième décimale, nous trouverons

$$\sqrt{3} = 1,7320508.$$

Substituant cette valeur dans les équations (a), nous aurons

$$OD = 0,8660254, \quad AB = 0,5773502, \quad AD = 0,2886751;$$

en comparant ces résultats aux décimales du rapport de Ludolphe, nous voyons quela moitié de AD ou plutôt que

$$\frac{AB}{4} = 0,1443375,$$

et que, par conséquent,

$$AG = 3 \textit{ rayons} + \tfrac{1}{4} AB = 3,1443,$$

ce qui donne une approximation du rapport du diamètre à la

(*) Si l'on avait aussi calculé la valeur de AO, on aurait d'abord trouvé

$$AO^2 = OB^2 + AB^2 = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3};$$

et, en passant à la racine,

$$AO = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2AB,$$

valeur qui ne nous aurait rien appris de plus que AB.

circonstance un peu moins rigoureuse que celui d'Archimède, qui revient à 3,14285.

Puisque AG n'a pas tout à fait la grandeur suffisante, il faut donc diminuer AB ou BG, c'est-à-dire avoir une différence au lieu d'une somme. Or, si nous prenions AB négativement, en le retranchant de trois rayons, nous trouverions

$$BG = 3 - 0,5773502 = 2,4226499;$$

et l'erreur deviendrait beaucoup plus grande en sens contraire. Mais nous entrevoyons aussi que, si BG est beaucoup plus petit que la quantité cherchée, l'hypoténuse EG du triangle rectangle EBG, plus grande que le côté, pourra s'approcher davantage de la vérité. Vérifions le fait : nous avons

$$EG^2 = BG^2 + BE^2,$$

ou

$$EG^2 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4, \ldots\ldots\ldots (b)$$

et, en développant,

$$EG^2 = 9 - 2\sqrt{3} + \tfrac{1}{3} + 4;$$

ou

$$EG^2 = \tfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}; \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

par conséquent nous aurons, pour la partie rationnelle de l'équation (*b*),

$$\tfrac{40}{3} = 13,3333333; \ldots\ldots\ldots (d)$$

d'un autre côté, la partie radicale de l'équation (*b*), évaluée numériquement, donne

$$2\sqrt{3} = 3,4641016;$$

si nous retranchons ce résultat de l'équation (*d*), nous obtiendrons

$$\tfrac{40}{3} - 2\sqrt{3} = 9,8692317 = EG^2.$$

Tirant la racine carrée, nous trouvons

3,14153, etc.,

nombre qui, dans les quatre premières décimales, s'accorde avec Ludolphe, et par conséquent est exact à un dix-millionième près.

Lorsqu'en 1827 je publiai cette démonstration dans les *Mémoires de l'Académie de Mâcon,* je portais, par un autre procédé, l'approximation jusqu'à 4 décimales de plus, me trouvant d'accord, dans les huit premiers chiffres décimaux, avec le rapport de Ludolphe; mais la difficulté et la complication de l'opération graphique me firent renoncer à un moyen qui, dans l'usage ordinaire, ne peut être préférable au calcul que lorsqu'il se recommande par la simplicité de l'opération. Depuis cette époque, on m'a fait connaître un procédé qui rentre tout à fait dans celui qui fait l'objet de cette note : il
Fig. 236. consiste (*fig.* 236) à prendre AG égal au triple du rayon, et à lui mener une parallèle EK égale à la tangente de 30 degrés; et alors KG équivaut, à peu de chose près, à la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Voici comment je crois qu'on peut le prouver : remarquons préliminairement que la tangente de 30 degrés n'est autre chose que la ligne AB de la figure 235, puisque l'angle AOB a pour mesure la douzième partie de la circonférence. Cela posé, si l'on porte la valeur
Fig. 236. de AB (*fig.* 235) de E en K (*fig.* 236), et que l'on prenne AG égal au triple du rayon, on trouvera

$$KG^2 = IG^2 + IK^2,$$

ou

$$KG^2 = (AG - EK)^2 + IK^2;$$

et, en mettant les valeurs analytiques de ces lignes,

$$KG^2 = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4:$$

on voit que l'expression est la même que celle dont nous avons fait usage [équation (*b*)].

Le côté du carré peut nous conduire aussi au même résultat :
Fig. 237. en effet, les diagonales AD, CB (*fig.* 237) se coupent à angle droit

au centre O, et, en représentant le rayon par AO (*fig.* 237), nous avons Fig. 237.

$$AC^2 = 2r^2.$$

Si nous prenons $AE = r$, il viendra

$$EC^2 = AE^2 + AC^2,$$

ou

$$EC^2 = r^2 + 2r^2;$$

et par conséquent en passant à la racine, nous trouverons

$$EC = r\sqrt{3};$$

prenant le rayon pour unité, et divisant par 3, nous aurons

$$\frac{1}{3}EC = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

retranchant cette valeur du triple du rayon, on obtiendra une quantité qui, élevée au carré et ajoutée au carré du diamètre, qui est 4, reproduira l'équation (*b*).

NOTE DIXIÈME. (Page 103.)

Démontrer, par la seule considération de la propriété du carré de l'hypoténuse, qu'un triangle est toujours coupé proportionnellement par une parallèle menée à sa base.

Supposons d'abord que ce triangle soit rectangle, et que DBE (*fig.* 238) le représente : par le point A, où passe la parallèle AF à la base, menons AC parallèle au côté DE ; et soient Fig. 238.

$$BC = a, \quad AC = b, \quad BA = c,$$
$$AF = a', \quad DF = b', \quad AD = c'.$$

La condition que les angles correspondants C et E soient droits, donne

$$a^2 + b^2 = c^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

la condition que l'angle F soit droit, donne

$$a'^2 + b'^2 = c'^2. \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Mais il ne suffit pas d'avoir exprimé par ces deux équations que les angles E et F soient droits, pour constater la similitude des triangles ABC, DAF; car on sait, par la géométrie, qu'il faut encore avoir deux angles égaux. Et, en effet, on voit dans
Fig. 239. la *fig.* 239, à laquelle peuvent se rapporter les mêmes données dont nous venons d'exprimer la relation algébriquement, que les angles DAF et ABC sont inégaux; ce qui ne serait pas si la ligne DAB était droite : il faut donc exprimer, par une troisième équation, que cette ligne DAB doit être une ligne droite.

Fig. 238. Or, dans ce cas, DAB devient (*fig.* 238) l'hypoténuse DB d'un triangle rectangle qui donne lieu à l'équation

$$BE^2 + DE^2 = DB^2,$$

ou $$(a + a')^2 + (b + b')^2 = (c + c')^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Il ne s'agira donc plus que d'éliminer a et a' entre les trois équations (a), (b) et (c), pour obtenir la relation qui doit exister entre les autres quantités b, b', c et c'. L'équation (c) étant développée, donne

$$a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2 = c^2 + 2cc' + c'^2.$$

Retranchant les équations (a) et (b) de celle-ci, il reste

$$2aa' + 2bb' = 2cc',$$

ou $$aa' + bb' = cc',$$

ou $$aa' = cc' - bb'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Les équations (a) et (b) me donnent

$$a^2 = c^2 - b^2,$$
$$a'^2 = c'^2 - b'^2.$$

Multipliant terme à terme, on obtient

$$a^2 a'^2 = (c^2 - b^2)(c'^2 - b'^2).$$

L'équation (d), élevée au carré, me donne aussi

$$a^2 a'^2 = (cc' - bb')^2.$$

Égalant ces valeurs de $a^2 a'^2$, développant et réduisant, on a

$$b^2 c'^2 - 2cc' bb' + c^2 b'^2 = 0,$$

et, parce que le premier membre de cette équation est un carré parfait,

$$bc' - cb' = 0, \quad \text{ou} \quad bc' = cb';$$

d'où l'on tire la proportion

$$c : c' :: b : b'.$$

Cette démonstration ne s'applique qu'au cas où le triangle serait rectangle. Pour passer à celui où il ne le serait pas, menons la droite DG (*fig.* 238), et prolongeons FA jusqu'en H; Fig. 238.
en faisant ensuite GH $= d$, DH $= d'$, nous démontrerions, comme précédemment, que l'on a la proportion

$$d : d' :: b : b';$$

donc, en comparant cette proportion à la précédente, on en tire

$$d : d' :: c : c'.$$

NOTE ONZIÈME. (Page 131.)

Démonstration directe de l'équation de la perpendiculaire.

L'équation de la perpendiculaire CB n'a été trouvée qu'en se fondant sur la considération des lignes négatives. Je vais en donner une démonstration plus directe.

Soient (*fig.* 240) x et y les coordonnées AP et PM d'un Fig. 240.
point quelconque M de la droite CB perpendiculaire à CO, et α et β les coordonnées AH et HI d'un autre point I.

Les triangles semblables HIB, PMB donnent la proportion

$$PB : PM :: HB : HI,$$

ou

$$\alpha + HB - x : y :: HB : \beta, \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

dans laquelle il faut mettre la valeur de HB qu'on va déterminer : la tangente trigonométrique de l'angle COB étant a, si l'on mène à la droite CO la parallèle IK, l'angle IKB comportera la même tangente, et l'on aura la proportion

$$1 : a :: KH : \beta,$$

qui donne

$$KH = \frac{\beta}{a}.$$

La ligne IH, étant une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit KIB sur l'hypoténuse, est moyenne proportionnelle entre les lignes KH et HB; par conséquent, on a la proportion

$$KH : IH :: IH : HB,$$

ou

$$\frac{\beta}{a} : \beta :: \beta : HB;$$

donc

$$HB = a\beta.$$

Substituant cette valeur dans la proportion (a), cette proportion devient $\alpha + a\beta - x : y :: a\beta : \beta$; et, en divisant par β le second rapport,

$$\alpha + a\beta - x : y :: a : 1.$$

Égalant le produit des moyens à celui des extrêmes,

$$ay = \alpha + a\beta - x;$$

faisant passer $a\beta$ dans le premier membre, et observant que a devient facteur commun des deux termes du premier membre,

$$a(y - \beta) = \alpha - x;$$

divisant par a,

$$y - \beta = \frac{1}{a}(\alpha - x);$$

et, à cause que

$$\alpha - x = -(x - \alpha);$$

on aura enfin

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha),$$

équation qui est la même que celle de l'art. 232.

NOTE DOUZIÈME. (Page 199.)

Démontrer que l'hyperbole s'écarte plus de l'axe des abscisses que la parabole.

Les branches de l'hyperbole, de la parabole et la ligne droite s'étendant jusqu'à l'infini, on peut demander quelle est celle de ces lignes qui s'écarte le plus rapidement de l'axe des abscisses. Pour répondre à cette question, donnons-leur une origine commune à un même sommet, et comparons d'abord une branche de parabole à la ligne droite; supposons que y et y' soient deux ordonnées de ces lignes qui correspondent à la même abscisse, nous aurons les équations

$$y = ax, \quad y'^2 = 2px;$$

la ligne droite étant supposée inclinée, la première de ces équations n'admet pour a qu'une valeur finie, et la seconde nous donne

$$y' = \sqrt{2p} \times \sqrt{x},$$

nous aurons donc, en remplaçant x par $\sqrt{x} \times \sqrt{x}$,

$$y' : y :: \sqrt{2p}\sqrt{x} : a\sqrt{x} \times \sqrt{x},$$

et par conséquent

$$y' : y :: \sqrt{2p} : a\sqrt{x};$$

d'où l'on tire

$$y = y'\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{2p}}.$$

Or, quand y' est très-grand, il en est de même de $\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{2p}}$; d'où il suit que, dans ce cas, y est égal au produit de y' par une quantité fort grande, ce qui montre que l'ordonnée de la ligne droite surpasse alors de beaucoup celle de la parabole.

Il ne sera pas plus difficile de démontrer que, dans la même hypothèse, l'ordonnée de l'hyperbole doit surpasser celle de la parabole; en effet, en écrivant ainsi l'équation de l'hyperbole, considérée dans sa branche positive,

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

on voit que quand x est fort grand, la fraction $\frac{a^2}{x^2}$ devient très-petite, et qu'alors notre branche d'hyperbole doit se rapprocher d'une ligne droite qui aurait pour équation

$$y = \frac{b}{a}x,$$

ce qui prouve que l'hyperbole s'écarte plus que la parabole de l'axe des x.

On peut d'ailleurs remarquer que, lorsque x est fort grande, la parabole tend à devenir parallèle à l'axe des abscisses; car, soient y et y' deux ordonnées de la parabole qui correspondent aux abscisses x et x', peu différentes l'une de l'autre; si x et x' sont très-grandes, il en est de même de y et y', à cause des équations

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad y'^2 = 2px'.$$

Or on tire de ces équations

$$y^2 - y'^2 = 2p(x - x'),$$

et en décomposant le premier membre en facteurs, cela se réduit à

$$(y - y')(y + y') = 2p(x - x'),$$

d'où l'on tire

$$y - y' = 2p\frac{(x - x')}{y + y'}.$$

Or, dans l'hypothèse de deux ordonnées fort grandes, placées à la distance $x - x'$ l'une de l'autre, la fraction, à cause du dénominateur, devenant très-petite, la différence $y - y'$ devient presque nulle, ce qui montre que la parabole tend à devenir parallèle à l'axe des x.

NOTE TREIZIÈME. (Page 224.)

Seconde démonstration de ce théorème, que, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle formé par le grand et le petit axe.

Pour démontrer le premier de ces théorèmes, si l'on multiplie l'équation (258) (page 222) par l'équation (259), on obtiendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{b^4\cos^2 q\cos^2 p + a^2 b^2 \sin^2 q\cos^2 p + a^2 b^2 \sin^2 p\cos^2 q + a^4 \sin^2 p \sin^2 q}.$$

Ajoutant dans le dénominateur, la quantité

$$2a^2 b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q \text{ (*)} - 2a^2 b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q,$$

qui est nulle, on pourra partager ce dénominateur en deux carrés, et l'équation précédente deviendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{(b^2\cos q\cos p + a^2 \sin q \sin p)^2 + (ab \sin q \cos p - ab \sin p \cos q)^2}.$$

(*) L'expression de $2a^2 b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q$ est le double de la racine du produit des termes extrêmes de ce dénominateur.

Observant que $b^2 \cos q \cos p + a^2 \sin q \sin p = 0$, en vertu de l'équation (250), prise avec le signe supérieur, l'expression précédente se réduit à

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{(ab \sin q \cos p - ab \sin p \cos q)^2},$$

ou plutôt à

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{[ab(\sin q \cos p - \sin p \cos q)]^2};$$

et comme le carré d'un produit composé de deux facteurs est égal au produit des carrés de ces facteurs, cette équation pourra s'écrire de la manière suivante :

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 (\sin q \cos p - \sin p \cos q)^2}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{(\sin q \cos p - \sin p \cos q)^2}.$$

Le dénominateur du second membre étant le carré de la valeur donnée par la trigonométrie de $\sin(q - p)$, on aura enfin

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^2 b^2}{\sin^2(q - p)^2},$$

et, en tirant la racine,

$$a' b' = \frac{ab}{\sin(q - p)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

faisant évanouir le dénominateur, il viendra

$$a' b' \sin(q - p) = ab.$$

Le premier membre de cette équation représente la surface du parallélogramme D'CB'G (*fig.* 141). Car soit D'H la hauteur de ce parallélogramme; il est évident (art. 88) que

Fig. 141.

$$\text{D'H} = \text{D'C} \times \sin \text{D'CH},$$

ou

$$\text{D'H} = b' \sin(q - p).$$

Multipliant la base CB′ par cette hauteur, on a

$$\textit{surface}\ \mathrm{D'CB'G} = \mathrm{CB'} \times \mathrm{D'H} = a'\,b' \sin(q - p);$$

et comme ab représente évidemment le rectangle construit sur les deux demi-axes a et b, le parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres est donc égal au rectangle formé par les deux demi-axes a et b. Et en observant que, si le parallélogramme et le rectangle ont des côtés doubles, les deux surfaces quadrupleront en même temps, on pourra conclure la proposition que nous avons énoncée.

Pour démontrer que dans l'hyperbole, comme dans l'ellipse, le *parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est égal au rectangle formé par le grand et le petit axe*, si l'on multiplie l'une par l'autre les équations (246) et (253), prises avec le signe inférieur, on trouvera

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{-b^4 \cos^2 q \cos^2 p + a^2 b^2 \sin^2 q \cos^2 p + a^2 b^2 \sin^2 p \cos^2 q - a^4 \sin^2 p \sin^2 q}.$$

Ajoutant dans le dénominateur la quantité

$$2a^2 b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q - 2a^2 b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q,$$

on pourra partager ce dénominateur en deux carrés, et l'équation précédente deviendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{-(b^2 \cos p \cos q - a^2 \sin p \sin q)^2 + (ab \sin q \cos p - ab \sin p \cos q)^2}.$$

Observant que $b^2 \cos p \cos q - a^2 \sin p \sin q = 0$, en vertu de l'équation de condition (250), prise avec le signe inférieur qui se rapporte à l'hyperbole, la valeur de $a'^2 b'^2$ se réduira à

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{[ab(\sin q \cos p - \sin p \cos q)]^2};$$

élevant les deux facteurs du dénominateur au carré, et réduisant

sant, on trouvera

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{(\sin q \cos p - \sin p \cos q)^2};$$

le dénominateur du second membre étant le carré de $\sin(q-p)$, on aura

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{\sin^2(q-p)},$$

et, en tirant la racine,

$$a'b' = \frac{ab}{\sin(q-p)};$$

faisant évanouir le dénominateur, il viendra

$$a'b' \sin(q-p) = ab. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Fig. 242. Si l'on prend (*fig.* 242) sur la direction du demi-diamètre conjugué CY′ au demi-diamètre CX′, une ligne CD′ égale en longueur à la constante b', et que l'on construise le parallélogramme D′CB′G, ce parallélogramme représentera le premier membre de l'équation précédente; car, soit D′H la hauteur de ce parallélogramme, on a (art. 85)

$$\text{D'H D'C} \sin \text{D'CH} = \text{D'C} \sin \text{D'CB} = b' \sin(q-p);$$

donc *surface* D′CB′G ou CB′D′H $= a'b' \sin(q-p)$.

Cette surface est, par conséquent, égale au produit ab, qui peut être représenté par un rectangle qui aurait a pour base, et pour hauteur la constante b de l'hyperbole; multipliant par 4 l'équation précédente, on trouvera

$$2a' \times 2b' \sin(q-p) = 2a \times 2b.$$

Les côtés du parallélogramme et ceux du carré devenant doubles, on en conclura le théorème énoncé ci-dessus.

NOTE QUATORZIÈME. (Page 227.)

Seconde manière de démontrer ce théorème, que, dans l'ellipse, la somme des carrés des diamètres conjugués est égale à la somme des carrés du grand et du petit axe.

La valeur de a^2b^2, tirée de l'équation (264) (page 224), étant substituée successivement dans les formules (246) et (247) (page 212), prises avec le signe supérieur, nous aurons

$$\frac{a'^2b'^2\sin^2(q-p)}{b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q} = b'^2, \qquad \frac{a'^2b'^2\sin^2(q-p)}{b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p} = a'^2;$$

faisant disparaître les dénominateurs, et supprimant le facteur commun dans chacune de ces équations, on trouvera

$$a'^2\sin^2(q-p) = b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q,$$
$$b'^2\sin^2(q-p) = b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p;$$

ajoutant ces équations, on aura

$$\left.\begin{aligned}(a'^2+b'^2)\sin^2(q-p) = a^2(\sin^2 p+\sin^2 q)\\ + b^2(\cos^2 p+\cos^2 q)\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme du premier. Pour cet effet, prenons une expression en a et en b de la forme de ce premier membre : cette expression $(a^2+b^2)\sin^2(q-p)$ étant égalée à elle-même, en partie développée, nous donne

$$(a^2+b^2)\sin^2(q-p) = (a^2+b^2)(\sin q\cos p - \sin p\cos q)^2,$$

ou, en achevant de développer le second membre,

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)\sin^2(q-p)\\ &= a^2\sin^2 q\cos^2 p - 2a^2\sin p\sin q\cos p\cos q + a^2\sin^2 p\cos^2 q\\ &+ b^2\sin^2 q\cos^2 p - 2b^2\sin p\sin q\cos p\cos q + b^2\sin^2 p\cos^2 q.\end{aligned}$$

Substituant, dans les termes extrêmes de la première ligne du second membre, les valeurs de $\cos^2 p$ et de $\cos^2 q$, et dans les termes extrêmes de la seconde ligne, les valeurs de $\sin^2 p$ et de $\sin^2 q$, qu'on tirera des équations

$$1 = \sin^2 p + \cos^2 p \quad \text{et} \quad 1 = \sin^2 q + \cos^2 q,$$

données par la trigonométrie, nous aurons

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2)\sin^2(q - p)\\ &= a^2\sin^2 q - a^2\sin^2 q\sin^2 p - 2a^2\sin p\sin q\cos p\cos q + a^2\sin^2 p - a^2\sin^2 p\sin^2 q\\ &+ b^2\cos^2 p - b^2\cos^2 p\cos^2 q - 2b^2\sin p\sin q\cos p\cos q + b^2\cos^2 q - b^2\cos^2 q\cos^2 p.\end{aligned}$$

Mettant dans le terme $-2a^2\sin p\sin q\cos p\cos q$, la valeur de a^2, et dans le terme $-2b^2\sin p\sin q\cos p\cos q$, celle de b^2, qu'on tirera de l'équation (250) (page 215), prise avec le signe supérieur, qui se rapporte à l'ellipse, et réduisant, on obtiendra

$$(a^2 + b^2)\sin^2(q - p) = \begin{cases} a^2\sin^2 q + a^2\sin^2 p \\ + b^2\cos^2 p + b^2\cos^2 q, \end{cases}$$

ou

$$(a^2 + b^2)\sin^2(q - p) = a^2(\sin^2 p + \sin^2 q) + b^2(\cos^2 p + \cos^2 q).$$

Éliminant le second membre de cette équation à l'aide de l'équation (a), et divisant ensuite par $\sin^2(q - p)$, on aura

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2; \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

multipliant par 4 les deux membres, pour passer des carrés des demi-axes et des demi-diamètres, aux carrés des axes et des diamètres, cette équation deviendra

$$4a'^2 + 4b'^2 = 4a^2 + 4b^2,$$

ou $$(2a')^2 + (2b')^2 = (2a)^2 + (2b)^2;$$

et comme $2a'$, $2b'$, $2a$ et $2b$ sont les diamètres et les axes de l'ellipse, on voit que la somme des carrés des diamètres est égale à la somme des carrés des axes.

NOTE QUINZIÈME. (Page 227.)

Seconde manière de démontrer que, dans l'hyperbole, la différence des carrés des diamètres conjugués est égale à la différence des carrés du grand et du petit axe.

La valeur de a^2b^2, tirée de l'équation $a'b' \sin(q-p) = ab$, étant substituée successivement dans les formules (246) et (253) (pages 213 et 216), qui, étant prises avec le signe inférieur, se rapportent à l'hyperbole, nous aurons

$$\frac{a'^2 b'^2 \sin^2(q-p)}{a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q} = b'^2, \quad \frac{a'^2 b'^2 \sin^2(q-p)}{b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p} = a'^2.$$

Faisant disparaître les deux dénominateurs, et supprimant le facteur commun dans chacune de ces équations, on trouvera

$$a'^2 \sin^2(q-p) = a^2 \sin^2 q - b^2 \cos^2 q,$$

$$b'^2 \sin^2(q-p) = b^2 \cos^2 p - a^2 \sin^2 p;$$

retranchant la seconde de ces équations de l'autre, on aura

$$\left.\begin{aligned}(a'^2 - b'^2)\sin^2(q-p) = a^2(\sin^2 q + \sin^2 p)\\ - b^2(\cos^2 q + \cos^2 p)\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme du premier : pour cet effet prenons une expression en a et en b de la forme de ce premier membre; cette expression étant égalée à elle-même, en partie développée, nous donne

$$(a^2 - b^2)\sin^2(q-p) = (a^2 - b^2)(\sin q \cos p - \sin p \cos q)^2,$$

ou, en achevant de développer le second membre,

$$(a^2 - b^2)\sin^2(q-p)$$
$$= a^2 \sin^2 q \cos^2 p - 2a^2 \sin p \sin q \cos p \cos q + a^2 \sin^2 p \cos^2 q$$
$$- b^2 \sin^2 q \cos^2 p + 2b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q - b^2 \sin^2 p \cos^2 q.$$

Substituant, dans les termes extrêmes de la première ligne du second membre, les valeurs de $\cos^2 p$ et de $\cos^2 q$, et dans les termes extrêmes de la seconde ligne, les valeurs de $\sin^2 p$ et de $\sin^2 q$, tirées des équations

$$\sin^2 p + \cos^2 p = 1 \quad \text{et} \quad \sin^2 q + \cos^2 q = 1,$$

nous aurons

$$(a^2 - b^2)(\sin q - p)$$
$$= a^2 \sin^2 q - a^2 \sin^2 q \sin^2 p - 2a^2 \sin p \sin q \cos p \cos q + a^2 \sin^2 p - a^2 \sin^2 p \sin^2 q$$
$$- b^2 \cos^2 p + b^2 \cos^2 p \cos^2 q + 2b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q - b^2 \cos^2 q + b^2 \cos^2 q \cos^2 p.$$

Mettant dans le terme $-2a^2 \sin p \sin q \cos p \cos q$, la valeur de a^2, et dans le terme $+2b^2 \sin p \sin q \cos p \cos q$, celle de b^2, que nous tirerons de l'équation (250) (page 215), prise avec le signe inférieur, nous obtiendrons

$$-a^2 \sin p \sin q + b^2 \cos p \cos q = 0,$$

et, après avoir réduit,

$$(a^2 - b^2) \sin^2 (q - p) = a^2 (\sin^2 q + \sin^2 p) = b^2 (\cos^2 p + \cos^2 q).$$

Substituant la valeur du second membre de cette équation dans l'équation (a), et supprimant le facteur commun, il viendra

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2;$$

multipliant par 4 les deux membres, nous aurons

$$4a'^2 - 4b'^2 = 4a^2 - 4b^2,$$

ou

$$(2a')^2 - (2b'^2) = (2a)^2 - (2b)^2.$$

NOTE SEIZIÈME. (Page 286.)

Ayant trouvé une démonstration du cône par la géométrie à trois dimensions, je l'avais insérée dans les éditions précédentes; mais l'ordre nouveau des matières ne m'a pas permis d'en

faire usage dans le texte; néanmoins, comme elle se rattache à l'objet qui est traité dans le chapitre XXVII, et qu'elle peut servir d'exemple sur la manière d'appliquer la géométrie analytique de trois dimensions à la solution d'un problème, j'ai cru devoir l'insérer dans cette note, en prévenant le lecteur de n'en prendre connaissance qu'après que j'aurai traité de l'équation du plan.

Plaçons l'origine (*fig.* 243) au centre A de la base du cône droit, dirigeons l'axe des z suivant la hauteur de ce cône, et nommons a le rayon AC de la base du cône, et b la hauteur AZ. Si, par un point M d'un côté ZC, on mène une parallèle MQ à l'axe AZ, cette parallèle MQ sera l'ordonnée z du point M; les deux autres coordonnées seront $AP = x$, $PQ = y$. Cela posé, le triangle AQP, qui est formé sur la base du cône entre les coordonnées x et y, étant rectangle en P, nous avons Fig. 243.

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2,$$

ou

$$AQ^2 = x^2 + y^2;$$

mais

$$AQ = AC - QC.$$

Mettant donc cette valeur de AQ dans l'équation précédente, on a

$$(AC - QC)^2 = x^2 + y^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Or, les triangles rectangles ZAC et MQC nous donnent

$$AZ : AC :: MQ : QC,$$

$$b : a :: z : QC;$$

d'où l'on tire

$$QC = \frac{az}{b}.$$

Substituant cette valeur et celle de AC dans l'équation (a), on obtient

$$\left(a - \frac{az}{b}\right)^2 = x^2 + y^2,$$

ou $$\frac{a^2}{b^2}(b-z)^2 = x^2 + y^2,$$ *équation du cône dont le centre de la base est à l'origine, et dont la hauteur est dirigée suivant l'axe des z.*

Coupons le cône par un plan, et, pour plus de simplicité, supposons que la trace de ce plan sur celui des x, y soit parallèle à l'axe des y; l'équation du plan étant en général $Ax + By + Cz + D = 0$, l'équation de la trace sur le plan des x, y sera $Ax + By + D = 0$; cette trace devant être parallèle à l'axe Ay, il faut que x soit constant, ce qui exige que B soit nul; par conséquent, l'équation du plan devient, dans cette hypothèse, $Ax + Cz + D = 0$, *équation d'un plan dont la trace est parallèle à l'axe des y.*

Si entre cette équation et celle du cône on élimine z, on trouvera

$$\frac{a^2}{b^2}\left(b + \frac{Ax + D}{C}\right)^2 = x^2 + y^2, \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

équation de l'intersection du cône par le plan.

Fig. 244. Transportons l'origine au point O (*fig.* 244), où le prolongement de l'axe des x rencontre la trace KI, et nommons x' l'abscisse OP; on aura $x = x' - AO$. Pour déterminer AO, je fais $z = 0$ dans l'équation $Ax + Cz + D = 0$ du plan KL, et je trouve pour l'abscisse du point O, $x = -\frac{D}{A}$.

La valeur absolue de AO sera donc $\frac{D}{A}$; et en mettant $x' - \frac{D}{A}$ à la place de x, dans l'équation (b) de l'intersection du cône par le plan, cette équation deviendra

$$\frac{a^2}{b^2}\left(b + \frac{A}{C}x'\right)^2 = \left(x' - \frac{D}{A}\right)^2 + y^2. \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Or, si nous menons, par le pied Q de l'ordonnée $z = MQ$, une parallèle QN à la coordonnée $x' = OP$, nous aurons

NQ = OP; le triangle rectangle MNQ donnera

$$\mathrm{MN}\cos\mathrm{MNQ} = \mathrm{NQ} = x'.$$

L'angle MNQ qui mesure l'inclinaison des deux plans étant constant, représentons-le par φ, et nommons MN, x, nous aurons

$$x\cos\varphi = x';$$

et, en mettant cette valeur de x' dans l'équation (c), nous obtiendrons

$$\frac{a^2}{b^2}\left(b + \frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{C}}\cos\varphi\right)^2 = \left(x\cos\varphi - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\right)^2 + y^2 \ldots (d)$$

Les coordonnées du point M deviendront $\mathrm{PQ} = \mathrm{ON} = y$, et $\mathrm{NM} = x$, et par conséquent elles seront comprises dans le plan KL.

Rassemblant entre deux parenthèses les termes multipliés par les mêmes puissances de x, et représentant par M la totalité des termes constants, on obtiendra

$$y^2 + \left(1 - \frac{a^2\mathrm{A}^2}{b^2\mathrm{C}^2}\right)x^2\cos^2\varphi - 2\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}} + \frac{a^2\mathrm{A}}{b\mathrm{C}}\right)x\cos\varphi + \mathrm{M}\ldots (e)$$

Cette équation peut se simplifier; car, φ représentant l'angle que le plan dont l'équation est $\mathrm{A}x + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$ fait avec le plan des x, y, si dans la première formule de l'art. 578, on fait $\mathrm{B} = 0$, on trouvera

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{C}^2}},$$

et

$$\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}.$$

D'une autre part, en nommant ψ l'angle ZVA que le côté du cône fait avec le plan des x, y, on a

$$\frac{\tang\mathrm{ZVA}}{1} = \frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{VA}} = \frac{b}{a}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{A}{C}$ et de $\frac{b}{a}$ dans l'équation (c), cette équation devient

$$y^2 + \left(1 - \frac{\tang^2 \varphi}{\tang^2 \psi}\right) x^2 \cos^2 \varphi - 2\left(\frac{D}{A} + a\frac{\tang \varphi}{\tang \psi}\right) x \cos \varphi + M, \ldots \quad (f)$$

équation générale de l'intersection du plan avec la surface du cône.

Comparant cette équation à l'équation générale (355) (p. 288) des courbes du second ordre, on verra que le terme en xy manquant, la condition nécessaire (art. 486) pour que la courbe soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole, sera qu'on ait

$$\left(\frac{\tang^2 \varphi}{\tang^2 \psi} - 1\right) \cos^2 \varphi, \text{ négatif, positif ou nul.}$$

Ces conditions se réduisent à avoir, dans le premier cas, $\frac{\tang \varphi}{\tang \psi}$ plus petit que l'unité; dans le second, $\frac{\tang \varphi}{\tang \psi}$ plus grand que l'unité; et dans le troisième, $\frac{\tang \varphi}{\tang \psi}$ égal à l'unité; la courbe sera donc

une ellipse, si l'on a $\tang \varphi < \tang \psi$ ou $\varphi < \psi$;

une hyperbole, si l'on a $\tang \varphi > \tang \psi$ ou $\varphi > \psi$;

une parabole, si l'on a $\tang \varphi = \tang \psi$ ou $\varphi = \psi$.

D'après ces conditions, il est facile de voir que si par un
Fig. 244. point du côté ZV d'un cône indéfini (*fig.* 244), on mène un plan et qu'on ait $\varphi = \psi$, c'est-à-dire DOA = ZVA, ce qui est le cas de la parabole, le plan sera parallèle au côté ZV, et s'en écartera davantage, si la condition de l'hyperbole est remplie, tandis que dans le cas de l'ellipse, ce plan sécant rencontrera le côté ZV du cône indéfini.

Si le plan KL est parallèle au plan des x, y, on a $\varphi = 0$;

les valeurs $\tang \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, étant substituées dans l'équation (f), la changent en $y^2 + x^2 - 2\frac{D}{A}x + M = 0$; ce qui nous apprend que dans ce cas la section du cône est un cercle.

NOTE DIX-SEPTIÈME. (Page 292.)

Examen du cas où les constantes F *et* C *de l'équation générale sont de mêmes signes.*

Dans le cas où F et C sont de mêmes signes, et que la partie négative $-\frac{F}{C}$ de l'équation (364) est moindre que $\frac{E^2}{4C^2}$, on peut remarquer que le radical est moindre que $\frac{E}{2C}$, par la raison que le carré $\frac{E^2}{4C^2}$ de la partie rationnelle surpasse $\frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}$. Il suit de là que, quand E et C sont de mêmes signes, les deux valeurs de x sont négatives, tandis qu'elles deviennent positives lorsque E et C sont de signes différents; car alors l'équation (364) devient

$$x = \frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}}.$$

NOTE DIX-HUITIÈME. (Page 294.)

Diverses observations sur le changement de place de l'origine, et démonstrations par l'analyse et par la géométrie, qui tendent à prouver qu'on ne peut faire concourir que simultanément les termes qui contiennent les premières puissances des variables.

Nous avons vu (art. 462) que lorsque le coefficient E du terme en x était nul, la valeur de x qui répond à $y = 0$ était

donnée par l'équation $x = \pm\sqrt{\frac{F}{C}}$, l'origine étant placée au milieu A″ (*fig.* 168) de la partie RR′ interceptée par l'axe des x; par conséquent, lorsque E n'est pas nul, l'origine n'est plus dans ce milieu, mais on peut l'y ramener par le procédé suivant : En désignant par x' l'abscisse comptée du milieu A″ de RR′, et par α la différence $x - x'$ des abscisses comptées de l'ancienne origine et de la nouvelle, on substituera cette valeur $x = x' + \alpha$ dans l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ (*), \ldots \ (a)$$

considérée comme se rapportant à l'axe A′X′, et l'on trouvera

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Ay^2 + Bx'y + Cx'^2 + D & y + E & x' + F \\ \qquad\qquad\qquad\quad + B\alpha & \quad + 2C\alpha & \quad + C\alpha^2 \\ & & \quad + E\alpha \end{array}\right\} = 0 \ldots . \ (b)$$

La nouvelle origine n'étant pas fixée, regardons la quantité β, qui en exprime la distance à l'ancienne, comme une quantité arbitraire, dont nous disposerons convenablement pour que le coefficient de x', dans la nouvelle équation, soit nul, et nous aurons celle-ci

$$E + 2C\alpha = 0;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{E}{2C}.$$

On reconnaît dans cette valeur de α la moitié de la distance de l'origine à la courbe, dont nous avons donné la valeur (art. **461**); on substituera celle de α dans l'équation (a), que, pour abréger, nous représenterons par

$$Ay^2 + Bx'y + Cx'^2 + dy + ex + f = 0, \ldots . \ (b)$$

dans laquelle les coordonnées x' et y sont comptées d'une

(*) Cette équation est celle de la page 288, désignée sous le n° 355.

autre origine, distante de l'origine A′ d'une quantité $\alpha = -\frac{E}{2C}$. La courbe pourra donc être construite avec l'équation (c), et sera telle que l'origine des x' sera au milieu A″ de la partie de l'axe des abscisses coupée par la courbe; car, lorsque $y = 0$, l'équation (c) donne pour x ces deux valeurs égales et de signes contraires :

$$+\sqrt{-\frac{f}{C}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{f}{C}}.$$

L'équation (b) construira donc la même courbe que l'équation (a), mais en prenant une origine différente, qui sera au milieu de la partie interceptée RR′ de l'axe des abscisses.

On aurait pu de même faire évanouir le terme en y, en égalant à zéro le coefficient de ce terme de l'équation (b), ou en substituant $y' + \beta$ à la place de y dans l'équation (a), et appliquant à la nouvelle équation un procédé analogue au précédent. Mais on se tromperait bien si l'on croyait pouvoir délivrer l'équation (a) des deux termes affectés des premières puissances de x et de y, lorsqu'après avoir fait évanouir le terme Ex de l'équation (d), on remplacerait y par la valeur $y' + \beta$, pour priver encore cette équation du terme Dy; car, cette valeur devant être mise dans tous les termes où entre y, étant substituée dans le terme $Bx'y$, elle ferait naître les deux termes $Bx'y'$ et $B\beta x'$, dont le second rétablirait dans la nouvelle équation la première puissance de l'abscisse; d'où l'on doit conclure que l'évanouissement de l'un des termes qui contiennent les premières puissances des variables doit ramener l'autre terme.

On peut voir, dans la *fig.* 245, la circonstance géométrique qui correspond à ce fait analytique : car, si la courbe construite d'abord avec l'équation (a) est représentée par RSR′S′, et que l'origine soit en A′, on transportera cette origine au milieu A″ de RR′, en substituant dans l'équation (a) la valeur Fig. 245.

$x' + \alpha$; et l'équation (b), qui en résultera après avoir fait évanouir le terme en x', sera, d'après ce qui précède, l'équation qui construirait la même courbe, en prenant A″ pour l'origine. Si, dans l'équation (c), l'on substitue ensuite $y' + \beta$ à y, et qu'à cause de l'indétermination de β, on fasse de même évanouir le coefficient de y', l'origine se trouvera transportée au milieu du nouvel axe SS′, au point A‴; mais alors la partie interceptée de l'axe des abscisses, au lieu d'être RR′, devenant TT′, n'est plus partagée en deux parties égales au point A‴, comme RR′ l'était en A″.

Quoiqu'il soit impossible de faire évanouir à la fois les termes Ex et Dy, en substituant successivement les valeurs $x' + \alpha$ et $y' + \beta$, il n'en est pas de même si cette substitution est faite simultanément dans l'équation (a).

En effet, lorsqu'on substitue d'abord la valeur $x' + \alpha$ à la place de x, et qu'on égale à zéro le nouveau coefficient de la première puissance de x, on assujettit l'origine à se trouver
Fig. 245. (*fig.* 245) sur le milieu A″ de la ligne RR′; et en substituant ensuite $y' + \beta$ à y, on ne peut disposer de l'indéterminée β, qu'en transportant l'origine sur un des points de la droite SS′ : donc l'origine ne peut plus avoir alors une situation arbitraire à l'égard de la courbe.

La situation de l'origine serait également limitée, si l'on eût commencé par faire évanouir le terme qui contient la première puissance de y; mais l'origine pourra se transporter en un point quelconque, si l'on substitue simultanément les valeurs $x' + \alpha$ et $y' + \beta$, et qu'on dispose convenablement des indéterminées α et β.

NOTE DIX-NEUVIÈME. (Page 295.)

Examen d'un cas particulier des coordonnées du centre.

Les numérateurs des fractions (370) ne peuvent devenir nuls ensemble, car α et β le seraient aussi ; par conséquent,

les deux origines se confondraient, et, les propriétés de la nouvelle appartenant alors à l'ancienne, on tomberait dans cette contradiction, que l'ancienne origine serait au milieu de la partie interceptée de l'axe des abscisses par la courbe; ce que nous avons démontré être impossible, lorsque l'équation n'a pas perdu le terme en x.

L'analyse nous conduit au même résultat; car la valeur de D tirée du numérateur $2AE - DB = 0$, et mise dans l'autre numérateur $2CD - EB = 0$, donnerait

$$\frac{E}{B}(4AC - B^2) = 0;$$

ce qui ne peut être dans les courbes des deux premiers genres.

Mais l'un de ces numérateurs pourrait être nul, sans que l'autre le fût. Par exemple : si $2AE - DB = 0$, la valeur de E tirée de cette équation changerait celle de β en

$$\beta = \frac{2CD - \frac{DB^2}{2A}}{B^2 - 4AC} = -\frac{D}{2A}\frac{(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC} = -\frac{D}{2A};$$

par conséquent, l'hypothèse de $\alpha = 0$ donne $\beta = -\frac{D}{2A}$.

On aurait trouvé de même que, si β était 0, α serait

$$-\frac{E}{2C}\frac{(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC} = -\frac{E}{2C}.$$

NOTE VINGTIÈME. (Page 305.)

Observations sur les courbes à centre du second ordre.

En examinant les circonstances géométriques qui correspondent à la simplification de l'équation générale des courbes du second ordre, on voit que cette équation se rapporte à une

courbe située sur un plan d'une manière quelconque à l'égard des axes, et qu'à mesure qu'elle se simplifie, ces axes changent de position, de manière qu'une courbe que ces axes ne rencontreraient pas ou qui la couperaient dans un sens quelconque, serait remplacée par d'autres axes qui, en dernière analyse, se confondraient avec le grand et le petit axe de la courbe; et alors le but de la simplification serait entièrement atteint.

Cependant, pour ne rien omettre sur les divers procédés qui auraient pu conduire au même but, voyons ce qui se passerait si, comme on l'a fait pour la parabole, on commençait les transformations par éliminer le coefficient du terme en x, y.

Les valeurs (art. 387) (page 238):

$$x = x' \cos p - y' \sin p,$$

$$y = x' \sin p + y' \cos p,$$

étant mises dans l'équation (355), on obtiendrait une nouvelle équation; donc le coefficient de $x'y'$ aurait la même valeur que si les termes Ex et Dy manquaient dans l'équation (355); d'où il résulte qu'en égalant ce coefficient à zéro, on aurait, pour déterminer tang p, l'équation que nous avons désignée par (379) (art. 469), et l'on conclurait, comme dans cet article, qu'il est toujours possible d'assigner une valeur de tang p convenable pour que le terme en $x'y'$ s'évanouisse.

L'équation des courbes du second ordre des deux premiers genres peut donc être représentée par

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

L'axe AX' (*fig.* 246), auquel cette nouvelle équation se rapporte, rencontrera l'axe primitif à l'origine A, et formera avec cet axe un angle X'AX qui sera déterminé par la condition que l'équation (a) soit dépourvue du terme en xy.

Or, par cette condition, l'équation (a) nous donne, pour la

valeur de y,

$$y = -\frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{-4ACx^2 - 4AEx + D^2 - 4AF};$$

en laissant seule dans le second membre la partie radicale, que nous représenterons par $\sqrt{X}$, cette dernière équation deviendra

$$y + \frac{D}{2A} = \pm\sqrt{X}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

faisant

$$y + \frac{D}{2A} = y', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

nous aurons

$$y' = \pm\sqrt{X}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

L'équation (c) exprimant la relation qui existe pour une même valeur de x, entre les ordonnées y et y' des équations (b) et (d), on voit qu'en ajoutant $\frac{D}{2A}$ à y, on a la valeur de y'.

Si l'on suppose donc que la courbe ait été construite sur l'axe AX′ au moyen de l'équation (b), la courbe aurait pu être construite dans la même place au moyen de l'équation plus simple (d), en prenant un axe A′X″ parallèle à AX′, et qui en serait distant d'une quantité $\frac{D}{2A}$ représentée par AA′; car deux ordonnées quelconques, telles que PM et P′M′, qui correspondent aux abscisses égales AP et A′P′, diffèrent toujours d'une quantité $PP' = AA' = \frac{D}{2A}$.

L'ordonnée y' que nous donne l'équation (d), ayant toujours deux valeurs qui sont les mêmes au signe près, l'axe A′X″ des abscisses partage en deux parties égales toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires, et coïncide par consé-

quent avec l'un des axes principaux; donc l'évanouissement du terme en xy, qui fait prendre à l'axe AX la direction AX′, la rend parallèle à A′X″, et par conséquent à l'un des axes principaux.

On peut faire ensuite évanouir le terme Dy, en substituant dans l'équation (a) la valeur $y' + \beta$ à y, et l'on obtiendra l'équation

$$Ay'^2 + Cx^2 + 2A\beta \left| \begin{array}{l} y' + Ex + A\beta^2 \\ \quad\quad\quad + D\beta \\ \quad\quad\quad + F \end{array} \right| = 0 \ldots\ldots (e)$$
$$+ D$$

Le coefficient de y', égalé à zéro, détermine la valeur β dont l'axe des abscisses doit être reculé parallèlement à lui-même, pour que l'équation donne toujours deux valeurs égales pour y'; ce qui ne peut être que lorsque le nouvel axe se confond avec l'un des axes principaux : aussi la valeur absolue de β se trouve-t-elle précisément égale à la différence $\frac{D}{2A}$ dont nous avions vu, ci-devant, que cet axe O′X″ était distant de OX′.

En substituant la valeur de β dans l'équation (e), dont nous représenterons le dernier terme par f, cette équation devient

$$Ay'^2 + Cx^2 + Ex + f = 0, \ldots\ldots (f)$$

et se rapporte à l'axe A′X″ qui est dirigé suivant l'un des axes principaux.

On peut changer sur cet axe la place de l'origine, en substituant à x dans l'équation (f) la valeur $x + \alpha$, et en déterminant α à volonté; alors l'équation (f) deviendra

$$Ay'^2 + Cx'^2 + 2C\alpha \left| \begin{array}{l} x' + C\alpha^2 \\ \quad\quad + E\alpha \\ \quad\quad + f \end{array} \right| = 0.$$
$$+ E$$

Si l'on dispose de α, en supposant $2C\alpha + E = 0$, l'équation ne renfermera plus x' qu'au second degré; et nous avons

vu que, dans ce cas, l'origine était transportée au centre O. Mais si c'est le terme constant qu'on égale à zéro, l'origine sera transportée à l'un des points où la courbe rencontre l'axe (art. 460), et l'on aura

$$C\alpha^2 + E\alpha + f = 0;$$

d'où l'on tirera

$$\alpha = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2}{4C^2} - \frac{f}{C}} = -\frac{E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{E^2 - 4Cf},$$

valeur toujours possible, ainsi que celle de β, parce qu'elles ne peuvent devenir ni égales à zéro, ni infinies, ni imaginaires : les deux premiers cas ne peuvent arriver, car il faudrait que quelques-uns des coefficients f, E, C et A pussent devenir nuls ; or c'est ce qui est impossible. En effet, les coefficients f et E ne peuvent être supposés nuls, dès qu'il s'agit de les faire évanouir. A l'égard des coefficients A et C, leur existence est nécessitée par l'hypothèse que l'équation (255) se rapporte aux courbes des deux premiers genres, hypothèse qui ne pourrait subsister, si seulement l'un de ces coefficients était nul ; car l'équation étant dépourvue du terme en xy, la condition $B^2 - 4AC = 0$ des courbes du troisième genre serait remplie.

D'une autre part, il est impossible que α devienne imaginaire, parce que (art. 460) l'expression $\frac{E^2}{4C^2} - \frac{f}{C}$ est toujours positive, lorsque l'axe coupe la courbe.

Nous remarquerons qu'il était indifférent ici, pour déterminer les valeurs de α et de β, que les substitutions des valeurs de x et de y fussent faites simultanément ou l'une après l'autre, mais qu'il n'en serait pas de même si le terme en xy existait dans l'équation (n) ; car, en substituant d'abord à y la valeur $y' + \beta$, le coefficient de y', qu'on doit égaler à zéro pour déterminer β, serait

$$2A\beta + D;$$

et, en substituant en même temps $x' + \alpha$ à x et $y' + \beta$ à y, ce coefficient deviendrait

$$2A\beta + B\alpha + D:$$

donc les deux opérations ne donneraient la même valeur de β, que lorsqu'on aurait

$$B = 0.$$

Les valeurs de α et de β déterminées pour faire évanouir le terme affecté de la première puissance de y et le terme constant, étant substituées dans l'équation (a), la réduisent à la forme

$$Ay^2 + Cx^2 + Gx = 0,$$

équation qui peut se mettre sous celle-ci :

$$y^2 = -\frac{Cx^2}{A} - \frac{Gx}{A};$$

et, en faisant

$$-\frac{C}{A} = n \quad \text{et} \quad -\frac{G}{A} = m,$$

les courbes des deux premiers genres dont l'origine (art. 482) est sur la courbe (art. 482) à l'extrémité de l'un des axes principaux, seront renfermées dans l'équation

$$y^2 = mx + nx^2.$$

NOTE VINGT ET UNIÈME. (Page 317.)

Des cas particuliers où l'équation générale des courbes du second ordre n'a aucune signification.

Nous avons fait la démonstration de l'art. 493, sans supposer qu'aucune des expressions P, Q, R ne soit nulle. Examinons ce qu'il arrive lorsqu'il en est autrement.

Supposons d'abord $P = 0$: la partie radicale $\sqrt{Qx + R}$ de l'équation (396) ne peut être toujours imaginaire ; car, en donnant une valeur à x du même signe que celui de Q, et telle que le terme de Qx surpasse l'autre, l'expression $Qx + R$ sera nécessairement positive ; par conséquent, la valeur de y ne restera pas imaginaire dans tous les cas.

Si Q et P sont nuls, on tombe dans le cas des art. 487 et 489. Si Q seul est nul, et que P et R soient négatifs, l'expression radicale prendra cette forme $\sqrt{-Px^2 - R}$, et deviendra imaginaire pour toute valeur de x. Il n'en serait pas de même si, dans ce dernier cas, P et R étaient de signes contraires ; car, suivant que R serait positif ou négatif, on pourrait, en donnant une valeur convenable à x, rendre Px^2 assez petit ou assez grand pour que l'expression qui est sous le radical fût positive.

Si R et Q sont nuls et que P soit négatif, l'équation ne pourra construire qu'un point dont les coordonnées seront $x = 0$, $y = -\frac{D}{2A}$; si la partie radicale se réduit à $\sqrt{Qx}$, elle sera réelle lorsqu'on donnera à x des valeurs du même signe que celui de Q ; enfin R peut être le seul terme nul : dans ce cas, en écrivant la partie radicale de cette manière, $\sqrt{x(Px + Q)}$, et en donnant à x une valeur de même signe que Q, le produit de Q par x sera positif ; et si le produit de Px par x est négatif, on pourra toujours prendre x assez petit pour que ce dernier produit soit au-dessous de l'autre, et qu'on obtienne une valeur réelle pour la partie radicale.

On voit que ces conditions sont les mêmes que celles qui ont lieu lorsque aucun des coefficients n'est supposé nul.

—

NOTE VINGT-DEUXIÈME. (Page 314.)

Démonstration de la quadrature de la parabole par la géométrie analytique.

Je suppose qu'on ait circonscrit à la parabole un polygone irrégulier, mais dont les côtés soient partagés chacun en deux parties égales aux points de tangente; ce qu'il est toujours possible d'exécuter en opérant de la manière suivante.

Fig. 247. Par un point T (*fig.* 247) de l'axe des abscisses, on mènera à la courbe une tangente TM″, qu'on prolongera jusqu'en S, en prenant M″S = TM″; par le point S on mènera à la courbe une seconde tangente SM′, qu'on prolongera jusqu'en R, en prenant M′R = SM′, et ainsi de suite.

Cela posé, formons le rectangle ABQP′, menons ensuite les parallèles DL, CN à l'axe des abscisses, et faisons

$$AP = \alpha,\quad PM = \beta,\quad AP' = \alpha',\quad P'Q = \beta',\quad AP'' = \alpha'',\quad P''R = \beta'';$$

si nous prolongeons le côté QR jusqu'en T′, MT′ sera une tangente à la courbe; et, d'après la valeur de la sous-tangente (art. 328) (page 197), on aura $AT' = AR = \alpha$; par conséquent, la tangente MT′ étant considérée comme une droite qui passe par le point M qui a pour coordonnées α, β, et par le point T′ qui a pour coordonnées $-\alpha$, o, l'équation de MT′ sera (art. 222)

$$y - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x - \alpha);$$

les points R et Q étant sur cette droite, on aura

$$y' - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x' - \alpha),\quad y'' - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x'' - \alpha);$$

d'où l'on tire

$$\beta(x' - \alpha) = 2\alpha(y' - \beta),\quad \beta(\alpha - x'') = 2\alpha(\beta - y''),$$

ou $\quad MP.PP' = 2AP.QN,\quad MP.PP'' = 2AP.MK;$

ajoutant ces équations, on obtient

$$MP(PP' + PP'') = 2AP(QN + MK),$$

ou

$$MP.P'P'' = 2AP.QL;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\textit{rectangle}\ NP'' = 2\textit{rectangles}\ BK. \quad \ldots\ldots (a)$$

Or, le côté RQ étant partagé en deux parties égales au point M, les triangles rectangles GMR, QMN sont égaux; donc, si du rectangle NP'' on retranche le premier de ces triangles, et qu'on y ajoute l'autre, on aura

$$\textit{rectangle}\ NP'' = \textit{trapèze}\ P''P'RQ. \quad \ldots\ldots (b)$$

de même les triangles RMK, QMI étant égaux, si l'on retranche RMK du rectangle BK, et qu'on y ajoute QMI, on aura

$$\textit{rectangle}\ BK = \textit{trapèze}\ BDRQ; \quad \ldots\ldots (c)$$

au moyen des équations (b) et (a), l'équation (a) devient

$$\textit{trapèze}\ P''P'RQ = 2\ \textit{trapèzes}\ BDRQ;$$

donc le côté RQ du polygone partage la figure BDRP''P'Q en deux parties qui sont dans le rapport de 2 à 1. Cette démonstration pouvant s'appliquer à tous les côtés du polygone, il en résulte que le contour polygonal TSRQ partage la surface ABPQ' dans le même rapport.

Cette propriété, étant indépendante du nombre de côtés du polygone, appartient aussi à la parabole, qui est la limite du contour polygonal; par conséquent, l'arc de parabole AMZ partage le rectangle AVZP' en deux parties, qui sont entre elles dans le rapport de 2 à 1; on a donc

$$\textit{surface}\ AMZP' = 2\ \textit{surfaces}\ AMZV,$$

$$\textit{surface}\ AMZV = \tfrac{1}{3}\ \textit{rectangle}\ AVZP';$$

et, par conséquent,

$$\textit{surface}\ AMZP' = \tfrac{2}{3}\ \textit{rectangle}\ AVZP' = \tfrac{2}{3}\ AP' \times P'Z.$$

NOTE VINGT-TROISIÈME. (Page 370.)

Seconde manière de trouver les cosinus des angles qu'une droite qui passe par l'origine fait avec les trois axes rectangulaires.

Fig. 248. Soient x, y, z (*fig.* 248) les coordonnées AP, PQ, QM d'un point M de la droite AM, et $x = az$, $y = bz$ les équations de cette droite. Si par le point M on mène en P une droite MP, cette droite se trouvant dans le plan MQP formé par le z et le y du point M, sera dans un plan perpendiculaire à l'axe des x, dont l'angle APM sera droit; et nommant α l'angle MAP, on aura par conséquent cette proportion

$$1 : \cos\alpha :: \mathrm{AM} : \mathrm{AP};$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AM}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Par un même raisonnement on trouverait

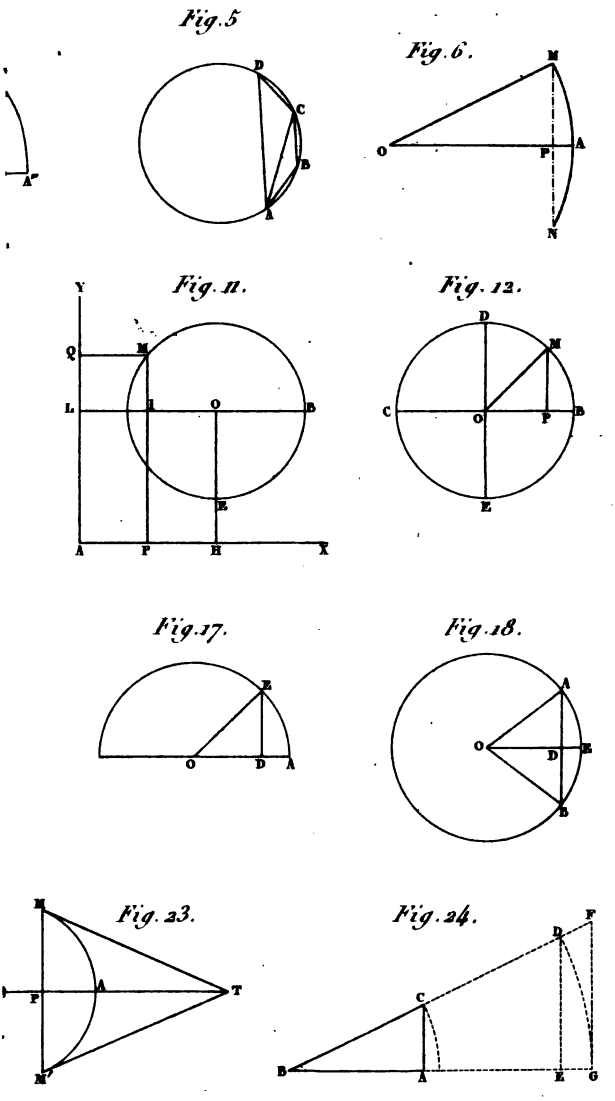
$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Mettant au lieu de x, de y et de z leurs valeurs tirées des équations $x = az$, $y = bz$, et divisant par z les deux termes de chaque fraction, on trouvera

$$\cos\mathrm{MAX} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad \cos\mathrm{MAY} = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\mathrm{MAZ} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

FIN DES NOTES.



Gravé par E. Wormser.

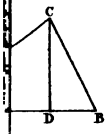


Fig. 28.

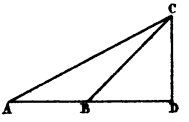


Fig. 29.

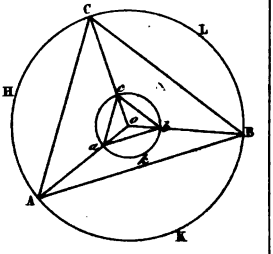


Fig. 30.

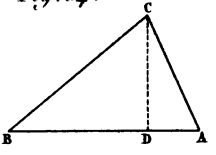


Fig. 34.

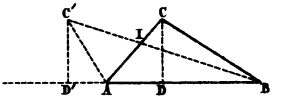
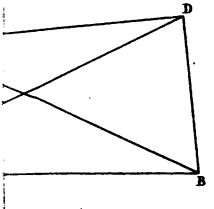
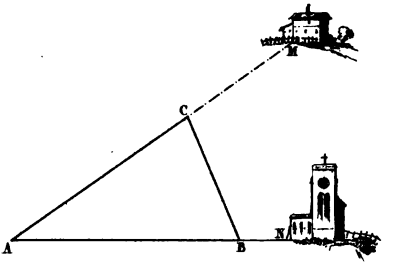
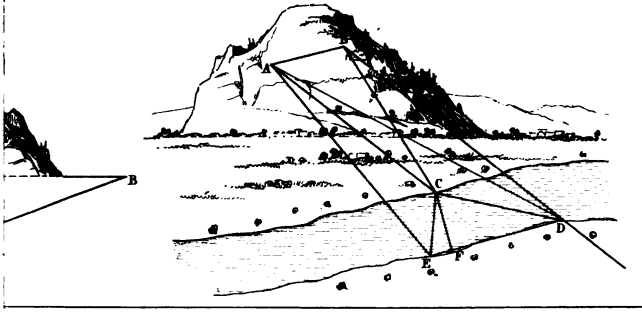


Fig. 35.







Gravé par E. Wormser.

Fig. 49.

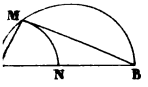


Fig. 50.

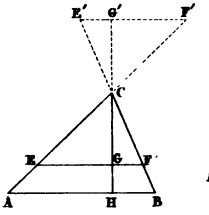


Fig. 51.

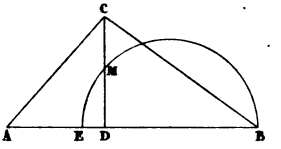


Fig. 56.

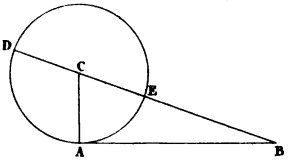


Fig. 57.

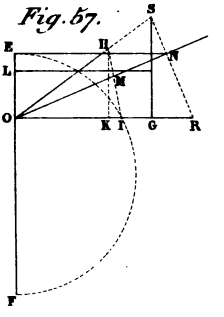


Fig. 61.

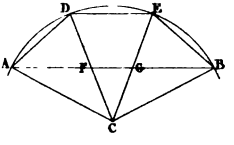


Fig. 62.

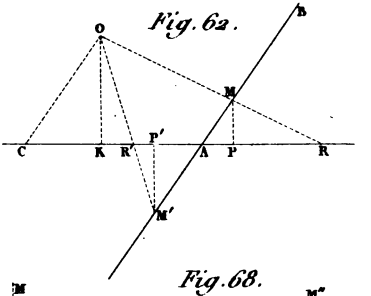


Fig. 67.

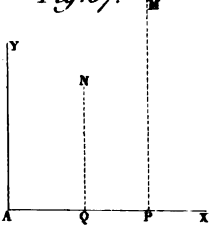
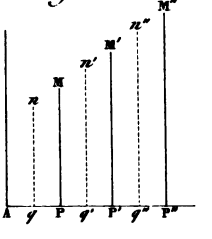


Fig. 68.



Gravé par F. Wormser.

Fig. 73.

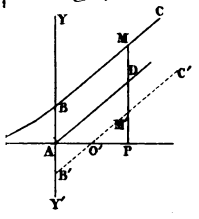


Fig. 74.

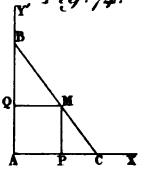
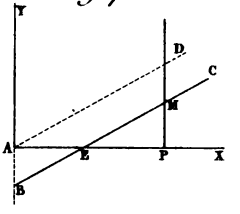


Fig. 75.



9.

Fig. 80.

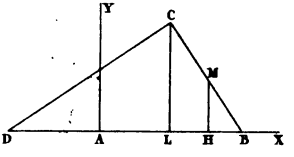


Fig. 81.

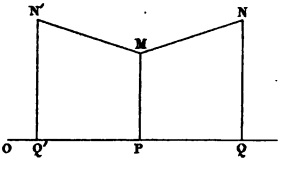


Fig. 85.

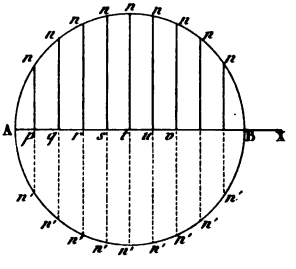
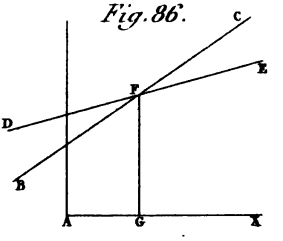


Fig. 86.



g. 90.

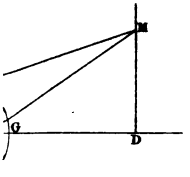
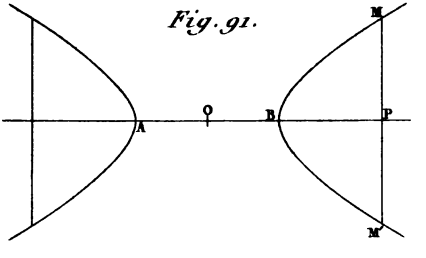


Fig. 91.



Gravé par F. Wormser

Fig. 95.

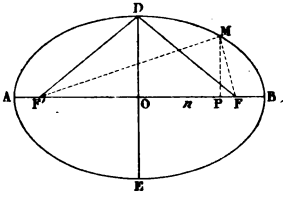
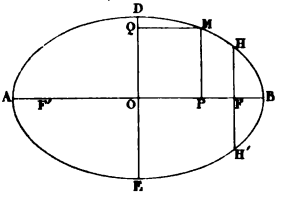


Fig. 96.



9.

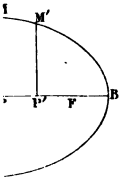


Fig. 100.

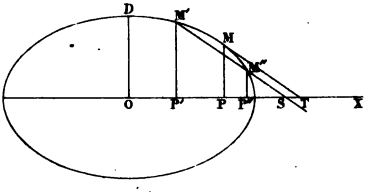


Fig. 103.

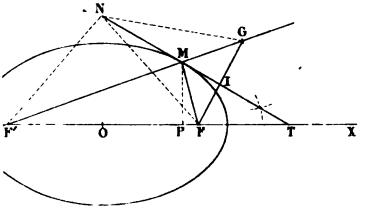
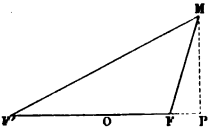


Fig. 104.



Gravé par E. Wormser.

07.

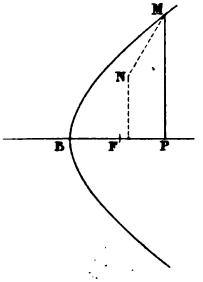


Fig. 108.

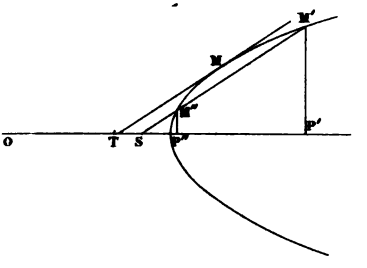


Fig. 111.

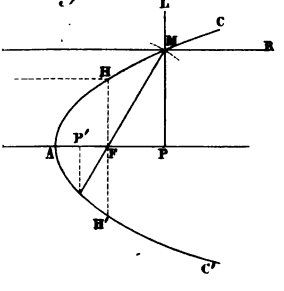


Fig. 112.

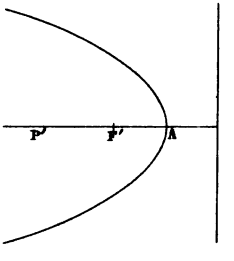


Fig. 115.

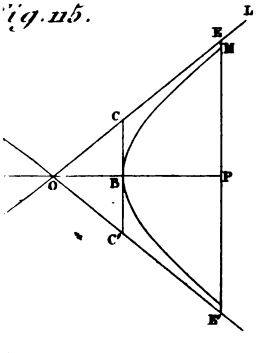
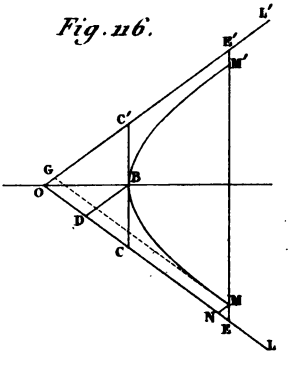


Fig. 116.



tirant par E. Wormser.

Fig. 119.

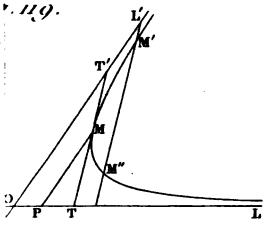


Fig. 120.

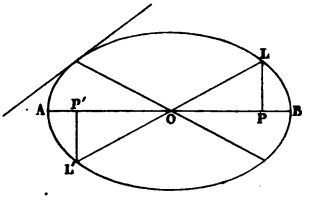


Fig. 123.

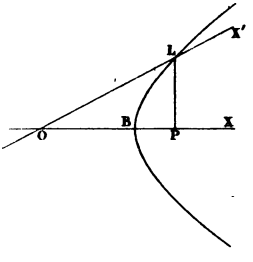


Fig. 124.

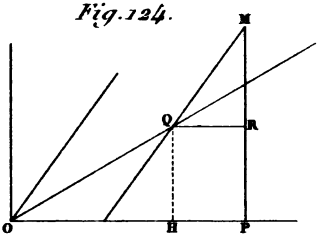


Fig. 128.

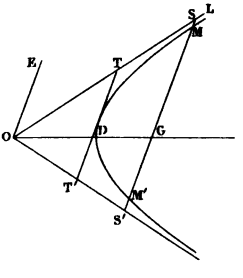
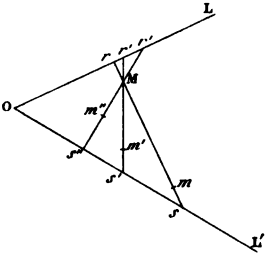


Fig. 129.



Gravé par F. Wormser.

ig. 132.

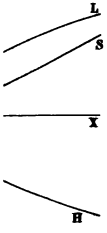


Fig. 133.

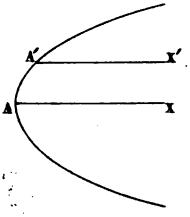


Fig. 134.

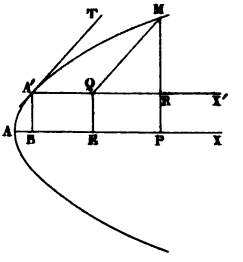


Fig. 137.

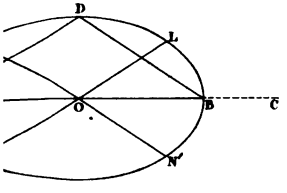
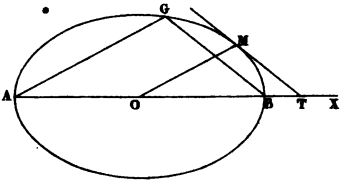


Fig. 138.



'41.

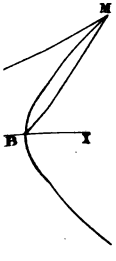


Fig. 142.

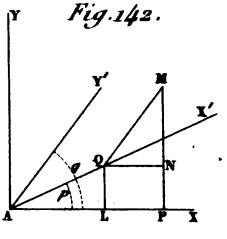
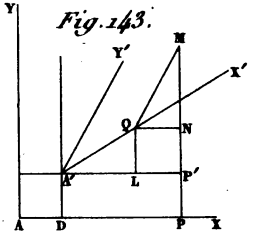


Fig. 143.



Gravé par E. Vermeer.

Fig. 146.

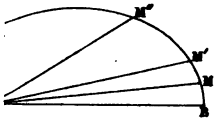


Fig. 148.

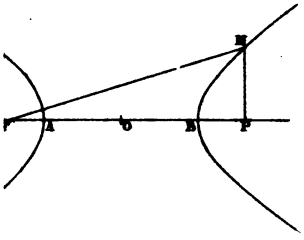


Fig. 152.

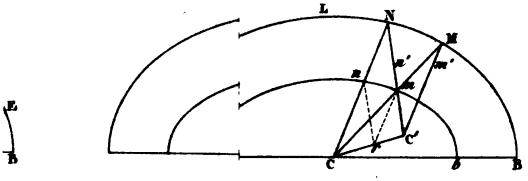


Fig. 155.

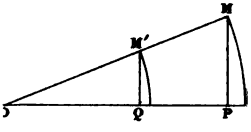
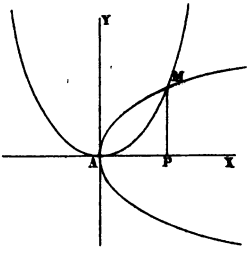


Fig. 157.



Gravé par E. Wormser.

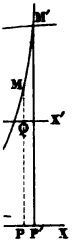
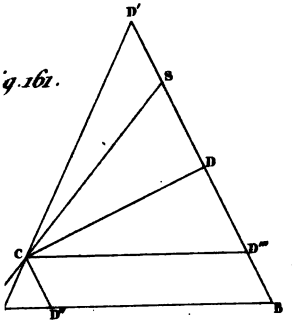


Fig. 161.



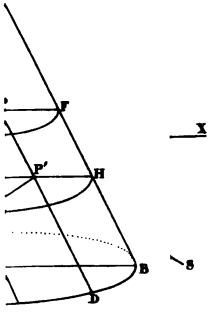


Fig. 166.

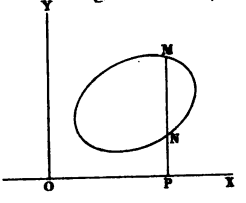
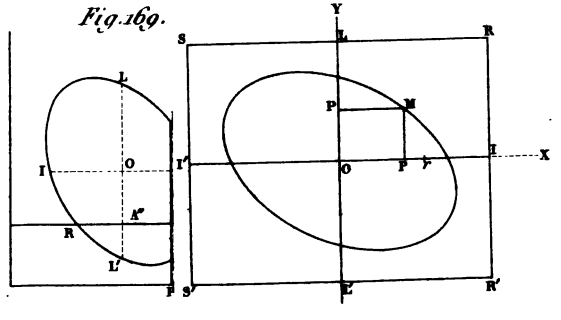


Fig. 171.

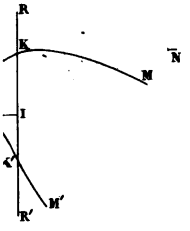
Fig. 169.



Gravé par E. Wormser.

3.

Fig. 176.



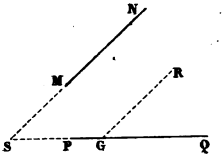
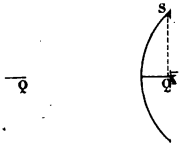


Fig. 181.



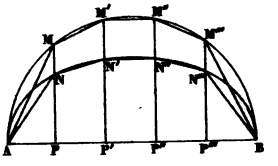
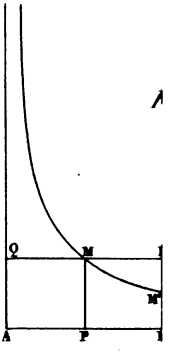
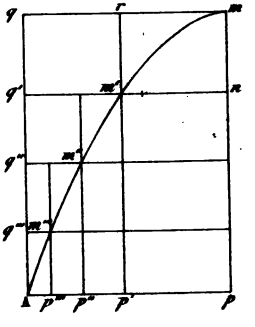


Fig. 184.





Gravé par E. Wormser.

Fig. 187.

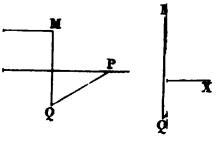


Fig. 190.

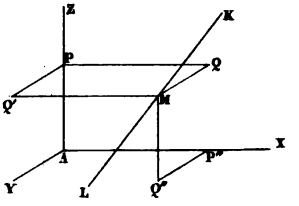


Fig. 193.

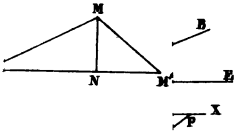


Fig. 196.

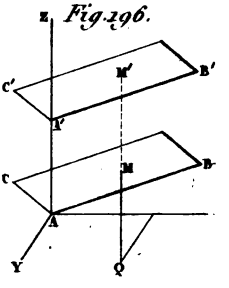


Fig. 199.

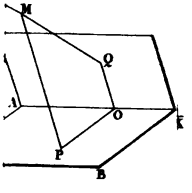


Fig. 202.

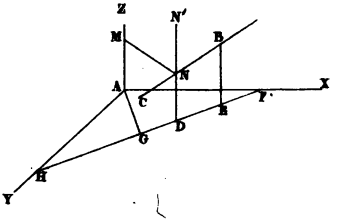


Fig. 205.

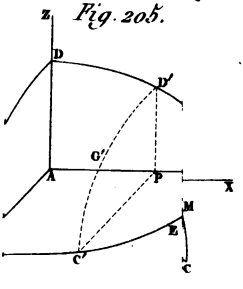
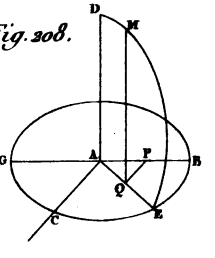


Fig. 208.



Gravé par E. Wörmser.

Fig. 211.

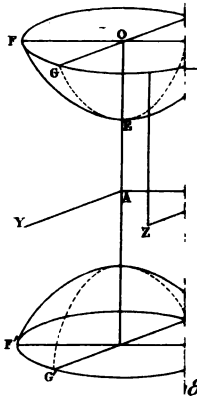


Fig. 213.

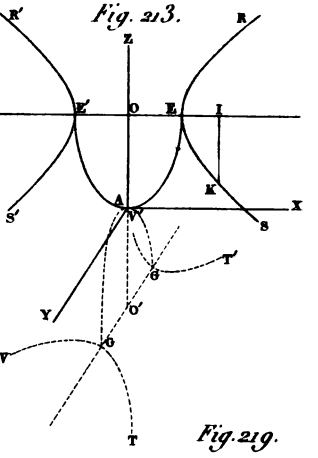


Fig. 216.

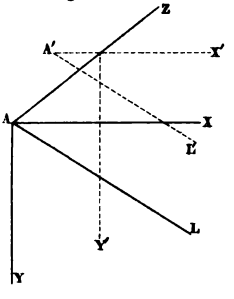


Fig. 219.

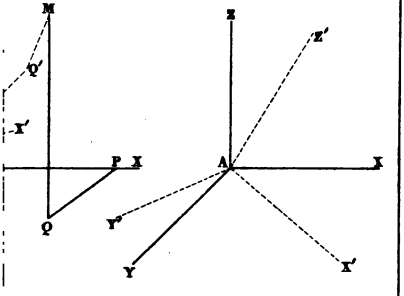


Fig. 222.

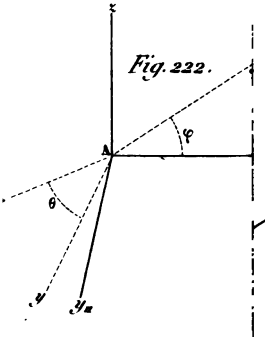
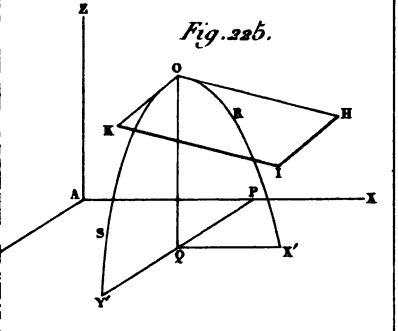


Fig. 225.



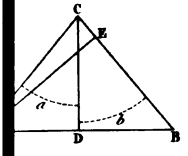
Gravé par E. Wermser.

arla

Fig

Fig.

Fig. 228.



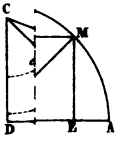


Fig. 231.

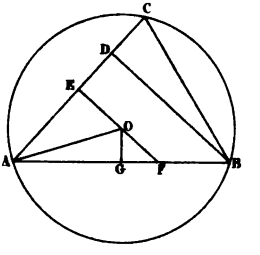


Fig. 234.

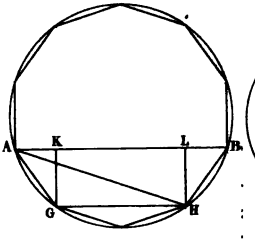


Fig. 236.

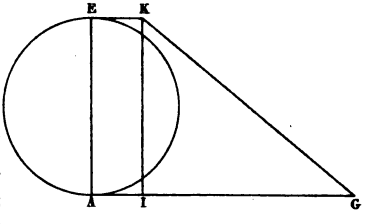
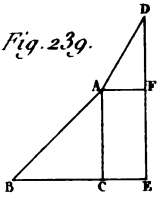


Fig. 239.



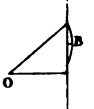


Fig. 242.

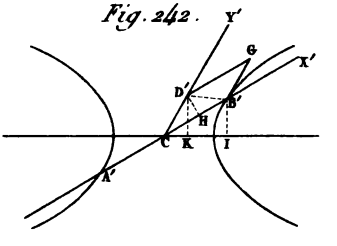


Fig.

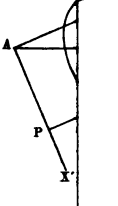


Fig. 245.

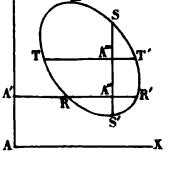
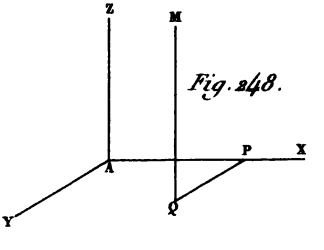


Fig. 248.



Gravé par E. Wormser.

37

3

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Math 8508.45.5
Theorie des courbes et des surface
Cabot Science 003347287
3 2044 091 918 664